INSTITUTO SUPERIOR
TECNOLÓGICO TENA
Tecnología, Innovación y Desarrollo

ADMINISTRACIÓN

Instrumento para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura

GUÍA GENERAL DE ESTUDIO DE LA ASIGNATURA 20250007

MATEMÁTICA FINANCIERA

Período académico
SEGUNDO

Octubre - 2025

LCDO. HECTOR ANIBAL LOZADA G.

GUIA GENERAL DE ESTUDIO DE LA ASIGNATURA – MATEMÁTICA FINANCIERA

INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO TENA

Carrera de Administración

ISTT ADM Segunda Edición – Tena, octubre 2025

SIN ISBN

Instituto Superior Tecnológico Tena
Km. 1 1/2 Vía Tena - Archidona
Tena, Ecuador

AUTOR(ES) - REDACCIÓN Y FORMULACIÓN DE CONTENIDOS
Lcdo. Héctor Anibal Lozada Grefa

Profesor del Instituto Superior Tecnológico Tena

REVISIÓN DE PARES

Mg. Alvaro Santiago Toalombo Diaz
Mg. Henry Fabian Chango Chango
Mg. Martha Janina Duarte Mora
Mg. Danilo Alexander Zamora Núñez
Lcda. María Angélica Campoverde Encalada

Comisión de revisión técnica de guías de estudio del Instituto Superior Tecnológico Tena

APROBACIÓN

Mg. Danilo Alexander Zamora Núñez
Coordinador de Investigación, Desarrollo Tecnológico e Innovación

Impreso y hecho en Ecuador.

TABLA DE CONTENIDO

GUIA GENERAL DE ESTUDIO DE MATEMATICA FINANCIERA

DATOS GENERALES DE LA ASIGNATURA

Carrera	Administración	**Nombre asignatura**	Matemática Financiera
Modalidad	Presencial	**Campo de Formación**	S/N
Jornada	Matutina/Nocturna	**Unidad de Organización Curricular**	Profesional
Periodo académico	Segundo	**Código de la asignatura**	ADM204
Distribución de horas en las actividades de aprendizaje		**Nº Total de horas de la asignatura**	96

Nº de horas Docencia	**48**	**Nº de horas Aprendizaje Práctico Experimental**				**Nº de horas Autónomo**	**0**
		En contacto con docente	**32**	**Autónomo**	**16**		

PRERREQUISITOS Y CORREQUISITOS

Prerrequisitos de la asignatura		**Correquisitos de la asignatura**	
Asignatura	**Código**	**Asignatura**	**Código**
Matemática Aplicada	ADM102	NA	

DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA

Proporcionar a los estudiantes las herramientas y los conceptos necesarios para comprender y aplicar principios matemáticos en situaciones financieras. Esto incluye el análisis y la evaluación de diferentes aspectos relacionados con el dinero, la inversión, el crédito, el interés, entre otros.

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar las habilidades matemáticas y financieras de los estudiantes para que puedan tomar decisiones financieras informadas y eficientes en contextos personales, empresariales o de inversión.

CONTRIBUCIÓN DE LOS RESULTADOS DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA AL PERFIL DE EGRESO DE LA CARRERA

Resultados de aprendizaje de la asignatura	**Resultados de aprendizaje del perfil de egreso de la carrera**	**Contribución (alta – media – baja)**
Identifica los conceptos básicos de la matemática financiera para la resolución de problemas.	Aplica los conocimientos adquiridos durante su formación profesional, a fin de que la administración sea organizada, sistemática y planificada de acuerdo a los niveles de crecimiento de la empresa.	Media
Determina el cálculo del interés simple y compuesto y cuál es su importancia en las operaciones financieras.	Analiza la información financiera de la empresa para llevar un control eficiente de los recursos con los que cuenta y tomar las medidas oportunas para hacerlos más fructíferos, precautelando su integridad	Alta
Interpreta el concepto y utilización de las anualidades y amortizaciones financieras		

Emplea el manejo de anualidades para la realización de flujos de efectivo en el ámbito financiero.	mediante la aplicación de aspectos básicos de la contabilidad.	

CONTENIDOS DE LA ASIGNATURA (descripción mínima de contenidos de la asignatura)

UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

1.1. Operaciones con números
1.2. Regla de tres simples
1.3. Porcentajes
1.4. Exponentes
1.5. Ejercicios de aplicación

UNIDAD 2: CÁLCULO DEL INTERÉS

2.1. Interés Simple
2.1.1. Definición Interés simple
2.1.2. Clases de interés
2.1.3. Valor presente
2.1.4. Descuentos
2.1.5. Despeje de formulas
2.1.6. El Monto
2.2. Interés Compuesto
2.2.1. Definición Interés Compuesto
2.2.2. Cálculo de interés compuesto con acumulación de interés simple
2.2.3. Despeje de formulas
2.2.4. Valor Futuro
2.2.5. Valor presente
2.2.6. Monto con tiempo fraccionario
2.3. Tasa Nominal Efectiva Y Equivalente
2.3.1. Ecuación de valor equivalente
2.3.2. Ejercicios de aplicación

UNIDAD 3: ANUALIDADES

3.1. Nomenclatura
3.2. Anualidades vencidas
3.3. Anualidades anticipadas
3.4. Fórmulas para cálculo de anualidades anticipadas
3.5. Ejercicios de aplicación.
3.6. Anualidades diferidas
3.7. Anualidades perpetuas
3.8. Ejercicios de aplicación

UNIDAD 4: AMORTIZACIONES

4.1. Sistemas de amortización
4.2. Capacidad de pago
4.3. Sistemas de amortización de créditos para vivienda
4.4. Sistemas de amortización de créditos en UVR
4.5. Ejercicios de aplicación
4.6. Cuota fija
4.7. Amortización constante
4.8. Cuota decreciente

4.9. Amortización de créditos varios sistemas 4.10. Ejercicios de aplicación		
ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y RECURSOS DIDÁCTICOS		
ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS	**HABILIDADES BLANDAS**	**FINALIDAD**
Activas para la enseñanza y aprendizaje	**Valores vinculados a la autonomía del sujeto:** confianza, crítica y autocrítica, honestidad, integridad	• Generar confianza/ Promover el pensamiento crítico. • Permite a los estudiantes cumplir un rol activo dentro de su formación. • Construye una sociedad participante.
Aprendizaje y trabajo cooperativo	**Valores elementales de convivencia y civilidad:** crítica y autocrítica, tolerancia, empatía, respeto, justicia, lealtad, paciencia	• Promover un ambiente de colaboración/ trabajo en equipo/ Saber escuchar/Promover el pensamiento crítico/ fomentar el liderazgo/ adaptabilidad. • Mantener una comunicación abierta con el equipo/ tolerancia a los errores, aceptar y aprender de las críticas. • Fomentar el sentido de pertenencia
Aprendizaje individual	**Valores vinculados a la autonomía del sujeto:** responsabilidad, honestidad, integridad, efectividad, autonomía	• Facilitar la asimilación del contenido por parte del estudiante/ Plantear preguntas para promover la comunicación efectiva /Promover el pensamiento crítico • Lectura comprensiva para fijar contenidos/ Promover el pensamiento crítico

RECURSOS DIDÁCTICOS	
MATERIALES CONVENCIONALES	*Material impreso: libros, folletos, fotocopias, periódicos, etc.*
	Tableros didácticos: pizarra
MATERIALES AUDIOVISUALES	*Imágenes fijas proyectables (fotos): diapositivas y fotografías.*
	Materiales audiovisuales (video): películas y videos
NUEVAS TECNOLOGÍAS	*Programas informáticos: procesador de palabras, hojas de cálculo, presentaciones*
	Servicios telemáticos: páginas web, plataforma EVA, correo electrónico, google drive

BIBLIOGRAFÍA		
Bibliografía Básica de la Asignatura:	**Físico**	**Digital**
Méndez, M. (2015). Matemáticas Financieras Rentas a interés compuesto (primera edición). Ediciones de la U. Colombia. **ISBN**: 978-958-762-409-0. **Número de inventario en biblioteca:** ISTT-DS-0196.	X	
Alfredo, Mata (2013), Matemática Financiera (quinta edición), Editores McGraw-hill, México **ISBN**: 978-970-10-5920-3. **Número de inventario en biblioteca:** ISTT-ADM-0343.	X	
Flores, Antonio (2015), Matemáticas Financieras Empresariales (era edición), Ecoe Ediciones, Bogotá **ISBN**: 978-958-771-193-6. **Número de inventario en biblioteca:** ISTT-ADM-0103	X	
Andrade, J. (2017). *Ejercicios resueltos de matemáticas financieras (primera edición).* Ecoe Ediciones. Bogotá. **ISBN:** 978-958-771-523-1. **Número de inventario en biblioteca:** ISTT-ADM-0083.	X	
Bibliografía de consulta de la Asignatura:	**Físico**	**Digital**
Frank Ayres, Jr. (1997). *Matemáticas financieras (primera edición).* McGraw-Hill. México. **ISBN:** 968-422-160-6. **Número de inventario en biblioteca:** ISTT-ADM-0050.	X	
Vidaurri, H. (2020). Matemática financiera (séptima edición). Cengage learning editores S.A de C.V. México. **ISBN:** 978-607-526-918-4. **Número de inventario en biblioteca:** ISTT-ADM-0115.	X	

DESCRIPTIVA DE LAS COMPETENCIAS DE LA GUÍA DE MATEMATICA FINANCIERA

La guía de Matemática Financiera desarrolla competencias orientadas al análisis y resolución de problemas financieros aplicados a contextos reales. Promueve el uso adecuado de fórmulas, tasas e instrumentos financieros para la toma de decisiones. Fomenta la interpretación de resultados y la gestión eficiente de recursos económicos. Además, impulsa el pensamiento lógico, crítico y analítico. Finalmente, busca que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos en situaciones laborales y personales.

Competencias Específicas

UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

- Comprender los conceptos básicos y la importancia de la matemática financiera en la toma de decisiones económicas.
- Identificar las variables financieras fundamentales y su aplicación en operaciones monetarias simples y compuestas.

UNIDAD 2: CÁLCULO DEL INTERÉS

- Diferenciar entre interés simple e interés compuesto y aplicar las fórmulas correspondientes en diversos contextos financieros.
- Analizar la relación entre tiempo, tasa e inversión para determinar el rendimiento o costo de una operación financiera.

UNIDAD 3: ANUALIDADES

- Comprender el concepto de anualidades y su importancia en operaciones de ahorro, inversión y préstamos.
- Calcular el valor presente y futuro de una anualidad utilizando métodos matemáticos financieros adecuados.

UNIDAD 4: AMORTIZACIONES

- Analizar los sistemas de amortización y su aplicación en préstamos o créditos a largo plazo.
- Elaborar cuadros de amortización que permitan interpretar la distribución del capital y los intereses en cada periodo.

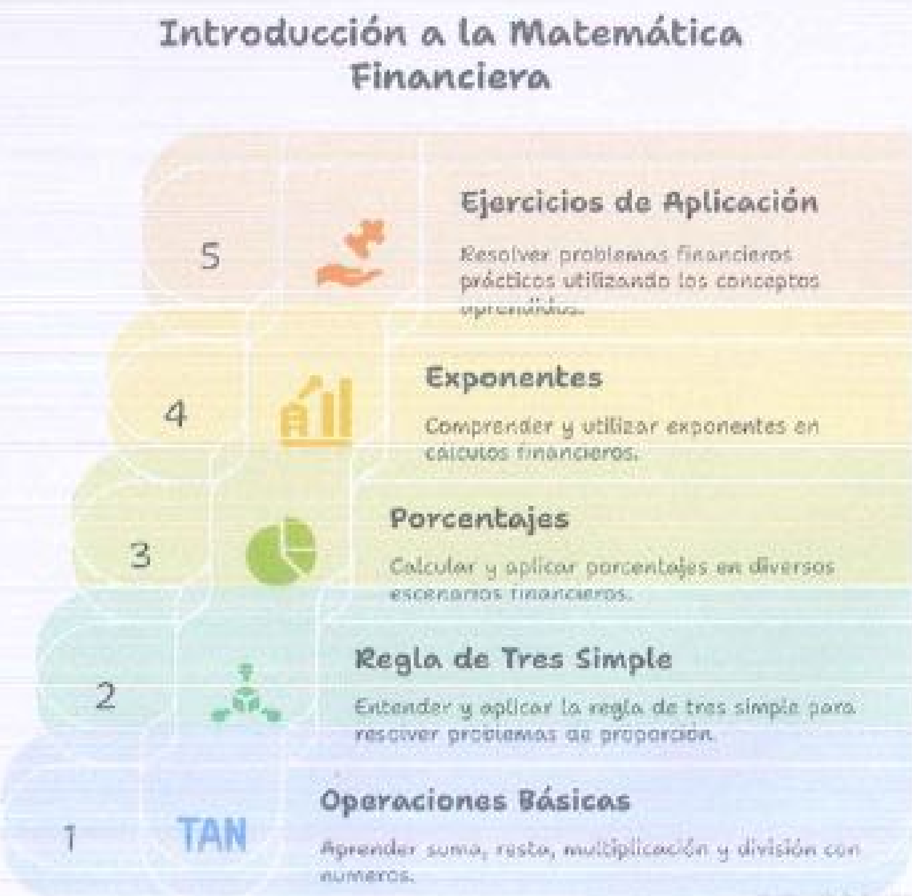
UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

1.1. Operaciones con números
1.2. Regla de tres simples
1.3. Porcentajes
1.4. Exponentes
1.5. Ejercicios de aplicación

Resultado de Aprendizaje

Identifica los conceptos básicos de la matemática financiera para la resolución de problemas.

DIAGRAMA DE APRENDIZAJE



SÍNTESIS

La Unidad 1 introduce los fundamentos esenciales para la comprensión de la matemática financiera: las operaciones con números, base para cualquier cálculo posterior; la regla de tres simple para la resolución de proporciones en contextos financieros; el análisis de los porcentajes para el estudio de incrementos, descuentos e intereses; y los exponentes y ejercicios de aplicación que fortalecen el razonamiento lógico y la precisión en la resolución de problemas numéricos.

UNIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

La introducción a la matemática financiera permite comprender cómo cambia el valor del dinero con el tiempo y su importancia en la toma de decisiones económicas. Esta disciplina combina conceptos matemáticos con situaciones financieras reales, permitiendo analizar inversiones, préstamos, ahorros, entre otros. A través de operaciones básicas, porcentajes, reglas de tres y exponentes, el estudiante desarrollará habilidades para poder interpretar y solucionar problemas financieros. Su estudio es fundamental para poder planificar de manera eficiente los recursos económicos personales y empresariales.

1.1. Operaciones con números

OPERACIONES BASICAS CON NÚMEROS NATURALES

SUMA DE NUMEROS NATURALES

En toda suma de números hay varios elementos: los números que se van a sumar llamados sumandos y el resultado de la operación llamado suma.

Ejemplo : $\underbrace{20 + 56 + 9}_{\text{Sumandos}} = \underbrace{85}_{\text{Suma}}$

En cualquier suma se verifica que: sumando desconocido = suma – sumando conocido

Ejemplos : $57 + ? = 73 \rightarrow ? = 73 - 57 \rightarrow ? = 16$

$\underbrace{12 + 25}_{} + ? = 84 \rightarrow 37 + ? = 84 \rightarrow ? = 84 - 37 \rightarrow ? = 47$

ACTIVIDADES

1) Calcula: a) $239 + 2 + 39$ b) $3753 + 64 + 8 + 643$ c) $646 + 4 + 6545 + 37$
2) Averigua el número que hay que poner en lugar de las interrogaciones en las siguientes expresiones:
   a) $354 + ? = 643$ b) $43 + 78 + ? = 421$ c) $12 + ? + 64 = 327$ d) $74 + ? + 842 = 7327$
3) ¿Cuánto suman los 10 primeros números impares?
4) ¿Cuánto suman todos los números acabados en 2 que hay entre el 100 y el 150?
5) Ana tiene 45 años, Beatriz tiene 18 años más que Ana y Carmen tiene 9 años más que Beatriz ¿cuántos años tienen entre las tres?

RESTA DE NUMEROS NATURALES

En toda resta de números hay tres elementos: el número del que vamos a restar llamado minuendo, el número que restamos llamado sustraendo y el resultado de la operación llamado resta o diferencia.

Ejemplo : $9 - 6 = 3$ ________

Minuendo / \\ ________

Diferencia

Sustraendo

En cualquier resta se verifica que: minuendo = sustraendo + diferencia
sustraendo = minuendo + diferencia

Ejemplos : ? — 8 = 47 → ? = 47 + 8 → ? = 55

37 - ? = 29 → ? = 37 — 29 → ? = 8

ACTIVIDADES

6) Calcula: a) 6478 – 4359 b) 85468 – 3949 c) 6477 - 678

7) Averigua el número que hay que poner en lugar de las interrogaciones en las siguientes expresiones:

a) 354 - ? = 143 b) ? — 54 = 543 c) 433 - ? = 285 d) ? — 433 = 285

8) Ana tiene 23 años y Pablo 31 años ¿qué edad tendrá Ana cuando Pablo tenga 52 años?

9) Luis tiene 28 años, Pablo tiene 13 años menos que Luís y Jorge tiene 18 años más que Pablo ¿cuántos años tienen entre los tres?

10) En una resta la diferencia es 7, si le sumamos 5 al minuendo y al sustraendo ¿cuál será la diferencia?

PRODUCTO DE NUMEROS NATURALES

En toda multiplicación de números hay tres elementos: los números que multiplicamos llamados factores y el resultado de la multiplicación llamado producto.

Ejemplo : 9 · 3 = 27

Factores Producto

En cualquier multiplicación se verifica que: factor desconocido = producto : factor conocido

Ejemplos : 7 · ? = 84 → ? = 84 : 7 → ? = 12

3 · 4 · ? = 72 → 12 · ? = 72 → ? = 72 : 12 → ? = 6

Hay algunas frases que tienen un significado especial: doble → multiplicar por 2
triple → multiplicar por 3
cuádruple → multiplicar por 4
quíntuple → multiplicar por 5

Ejemplos : El doble de 7 → 7 · 2 = 14; El cuádruple de 5 → 5 · 4 = 20

ACTIVIDADES

11) En un país nacen 2 niños cada minuto.
a) ¿Cuántos niños nacen en 7 horas?
b) ¿Cuántos niños nacen en 2 días?
c) ¿Cuántos niños nacen en 3 semanas?

12) Averigua el número que hay que poner en lugar de las interrogaciones en las siguientes expresiones:
a) 56 · ? = 672 b) 9 · 13 · ? = 819 c) 14 · ? = 364 d) 8 · ? · 17 = 4352

13) Calcula: a) El triple de 78 b) El doble de 649 c) El quíntuple de 743 d) El cuádruple de 835

14) En un garaje hay 98 coches y 146 motos ¿cuántas ruedas hay en el garaje?

15) Una camiseta vale 5 € y un pantalón 16 €. ¿Cuánto me costarán 3 camisetas y 2 pantalones?

DIVISION DE NUMEROS NATURALES

En toda división de números hay cuatro elementos: el número que vamos a dividir llamado dividendo, el número entre el que dividimos llamado divisor, el resultado de la división llamado cociente y lo que sobra después de dividir llamado resto.

Ejemplo : dividendo → 25 | 7 ← divisor
resto → 4 3 ← cociente

En cualquier división se verifica que: divisor · cociente + resto = dividendo
resto < divisor

Ejemplo : En la división del ejemplo anterior se cumple que 7 · 3 + 4 = 25 y 4 < 7 Hay algunas frases que tienen un significado especial: mitad → dividir entre 2

tercera parte → dividir entre 3
cuarta parte → dividir entre 4 quinta parte → dividir entre 5

Ejemplos : La mitad de 8 → 8 : 2 = 4; La cuarta parte de 28 → 28 : 4 = 7

ACTIVIDADES

16) ¿Cuál es el resto de las siguientes divisiones? : a) 6483 : 32 b) 53743 : 63 c) 6482 : 125

17) En una división el cociente es 16, el divisor es 9 y el resto es 8 ¿cuál es el dividendo?

18) En una división el cociente es 34, el divisor es 18 y el resto es 12 ¿cuál es el dividendo?

19) En una división el cociente es 38, el divisor es 12 y el resto es 15 ¿está bien hecha la división? ¿por qué?

20) Entre 4 gallinas ponen 8 docenas de huevos ¿cuántos huevos pone cada gallina?

21) La distancia entre Perales de Arriba y Perales de Abajo es de 144 Km. si salgo de Perales de Arriba y recorro la tercera parte del camino ¿qué distancia me queda para llegar a Perales de Abajo?

22) ¿Cuál es la mitad del triple de 678?

23) ¿Cuál es el doble de la tercera parte de 342

24) Si al triple de 74 le resto la mitad de 234 ¿Qué resultado dará?

OPERACIONES COMBINADAS CON NUMEROS NATURALES

Cuando en una misma expresión hay sumas, restas, productos y divisiones el orden en el que se realizan las operaciones es el siguiente:

1° → Operaciones dentro de los paréntesis 2º → Productos y divisiones
3º → Sumas y restas
4º → Si las operaciones tienen la misma jerarquía se empiezan por la izquierda.

Ejemplos: $5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$ $\quad (5 + 2) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21$ $\quad (12 - 2) : (7 - 5) = 10 : 2 =$

5

ACTIVIDADES

25) Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $7 + 5 \cdot 3$	b) $(7 + 5) \cdot 3$	c) $24 - 16 : 2$
d) $(24 - 16) : 2$	e) $95 - 17 \cdot 4$	f) $(95 - 17) \cdot 4$
g) $4 + 7 \cdot 3 - 10 : 5 + 7$	h) $(4 + 7) \cdot 3 - 10 : 5 + 7$	i) $30 - 20 : 5 + 7 - 5$
j) $(30 - 20) : 5 + 7 - 5$	k) $5 + 3 \cdot 6 - 12 : 4 + 5$	l) $(5 + 3) \cdot 6 - 12 : 4 + 5$
m) $12 + 7 \cdot 18 - 4 - 14$	n) $12 + 7 \cdot (18 - 4) - 14$	ñ) $(12 + 7) \cdot (18 - 4) - 14$
o) $5 + 4 \cdot 3 - 1$	p) $5 + 4 \cdot (3 - 1)$	q) $(5 + 4) \cdot (3 - 1)$

SOLUCIONES

1) a) 280	b) 4468	c) 7232	
2) a) 289	b) 300	c) 251	d) 6411
3) 100			
4) 610			
5) 180 años			
6) a) 2119	b) 81519	c) 5799	
7) a) 211	b) 597	c) 148	d) 718
8) 44 años			
9) 76 años			
10) 7			
11) a) 840 niños	b) 5760 niños	c) 60480 niños	
12) a) 12	b) 7	c) 26	d) 32

13) a) 234 b) 1298 c) 3715 d) 3340

14) 684 ruedas

15) 47 €

16) a) 19 b) 4 c) 107

17) 152

18) 624

19) No, porque el resto es mayor que el divisor.

20) 24 huevos

21) 96 Km.

22) 1017

23) 229

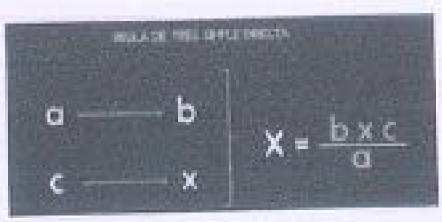
24) 105

25) a) 22 b) 36 c) 16 d) 4 e) 27
f) 312 g) 30 h) 38 i) 28 j) 4
k) 25 l) 50 m) 120 n) 96 ñ) 252
o) 16 p) 13 q) 18

1.2. Regla de tres simple

La regla de tres simple es una forma de resolver problemas, que esencialmente se tratan de situaciones en las que se nos presentan proporciones directas o indirectas. En estas situaciones siempre se relacionan dos magnitudes, en una de las cuales no se conocerá el valor y se llamará incógnita, la cual despejaremos. Vamos a dividir el tema según el tipo de proporciones que se planteen en el problema: Si la relación entre las magnitudes es directa (cuando aumenta una magnitud también lo hace la otra) hay que aplicar la regla de tres simple directa. Por el contrario, si la relación entre las magnitudes es inversa (cuando aumenta una magnitud disminuye la otra) se aplica la regla de tres simples inversas.

1.2.1 Regla de 3 simple directa: Empezaremos viendo cómo aplicarla en casos de proporcionalidad directa (cuando aumenta una magnitud también lo hace la otra).Colocaremos en una tabla los 3 datos (a los que llamamos "a", "b" y "c") y la incógnita, es decir, el dato que queremos averiguar (que llamaremos "x"). Después, aplicaremos la siguiente fórmula:



Ejemplo: Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos han dicho que 5 centímetros del mapa representan 600 metros de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este parque?

Vamos a hacer la tabla con los 3 datos y la incógnita ("x"), y hallaremos "x" con la fórmula que acabamos de aprender:

Centímetros en el mapa		Metros en la realidad
5	$\longrightarrow$	600
8	$\longrightarrow$	x

$$\Longrightarrow x = \frac{600 \cdot 8}{5} = 960$$

Solución: El parque se encuentra a 960 metros del hotel

1.2.2 Regla de 3 simple inversa: Ahora vamos a ver cómo aplicar la regla de 3 simple en casos de proporcionalidad inversa (cuando aumenta una magnitud disminuye la otra). Colocaremos los 3 datos y la incógnita en la tabla igual que los hemos colocado en el caso anterior. Pero aplicaremos una fórmula distinta:

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array} \quad \Bigg| \quad X = \frac{a \times b}{c}$$

Ejemplo: Ayer 2 camiones transportaron una mercancía desde el puerto hasta el almacén. Hoy 3 camiones, iguales a los de ayer, tendrán que hacer 6 viajes para transportar la misma cantidad de mercancía del almacén al centro comercial. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?

Colocamos los datos en una tabla y aplicamos la fórmula de la regla de 3 simple inversa:

Camiones		Viajes necesarios
3	$\longrightarrow$	6
2	$\longrightarrow$	x

$$\Longrightarrow x = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Solución: Ayer los 2 camiones hicieron 9 viajes.

Actividad: Soluciona las siguientes situaciones problema aplicando la regla de tres directa o la inversa, según sea el caso.

1. Si 6 revistas científicas valen $ 31200, ¿cuánto es el costo de 9 revistas?

2. Un vehículo gasta 6 horas para viajar de un lugar a otro a una velocidad de 40 km/h. ¿Cuánto tiempo gasta si viaja a una velocidad de 70 km/h?

3. Un edificio es pintado por 12 obreros en 15 días. ¿cuántos días emplearán 20 obreros en pintar el mismo edificio?

4. Un paquete que contiene 6 tornillos cuesta $950 pesos. ¿Cuál es el precio de 9 tornillos de la misma especie?

5. Si 4 libros cuestan $20000, ¿Cuánto costarán 3 docenas de libros?

6. Si una vara de 2.15 m. de longitud da una sombra de 6.45 m. ¿Cuál será la altura de una torre cuya sombra, a la misma hora es de 51 m.?

7. Una torre de 25.05 m. da una sombra de 33.40 m. ¿Cuál será, a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1,80 m?

8. Si media docena de una mercancía cuesta 14.50 dólares, ¿Cuánto costarán 5 docenas de la misma mercancía?

9. Si 2 galones de gasolina cuestan $18.200, ¿Cuántos galones se pueden comprar con $50.000?

10. Un automóvil recorre 30 km en un cuarto de hora, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en una hora y media?

11. Una taza de agua eleva su temperatura en 0.5 °C al estar 45 minutos al sol, ¿Cuántos grados se elevará después de 2 horas?

12. En una escuela hay 467 alumnos y el día de hoy faltaron 63. ¿Qué porcentaje de alumnos estuvo ausente?

13. Un trabajador gana por jornada de 8 horas $124.500, si su jornada aumenta en 3 horas ¿Cuál será su nuevo salario?

14. 14 trabajadores restauran una casa en 8 días. ¿Cuántos trabajadores serán necesarios para que la restauren en 5 días?

15. 5 CD´s de música cuestan $ 1000 ¿Cuánto valen 3 cajas con 10 cd´s cada una?

16. Una máquina fabrica 1200 tornillos en seis horas, ¿cuánto tiempo le llevará a la máquina fabricar 10000 tornillos?

17. 1 kg de jamón cuesta $25000 ¿Cuántos gramos de jamón puedo comprar con $10000?

Solución:

Nº	Resultado	Tipo de relación
1	$46.800	Directa
2	3 h 26 min	Inversa
3	9 días	Inversa
4	$1.425	Directa
5	$180.000	Directa
6	17.0 m	Directa
7	2.4 m	Directa
8	$145	Directa
9	5.49 galones	Directa
10	180 km	Directa
11	1.33 °C	Directa
12	13.5 %	—
13	$171.188	Directa
14	22–23 trabajadores	Inversa
15	$6.000	Directa
16	50 h	Directa
17	400 g	Directa

1.3. Porcentajes

<u>Método 1</u>: Por fracción de un número

Este método es muy útil cuando conocemos de antemano la fracción que corresponde a determinados porcentajes:

<u>Recordemos:</u>

Porcentaje	Fracción irreductible
50 %	$\frac{1}{2}$
25 %	$\frac{1}{4}$
10 %	$\frac{1}{10}$
20 %	$\frac{1}{5}$
75 %	$\frac{3}{4}$

Sin embargo, todo porcentaje tiene asociada una fracción irreductible, por ejemplo el $12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ por lo tanto si quisiéramos el 12% de una cantidad, tendríamos que dividir esa cantidad en 25 y luego el resultado multiplicarlo por 3.

Por este método encuentra los siguientes porcentajes:

20 % de 2.400 =	75 % de 6.570 =
25 % de 4.680 =	50 % de 87,04 =
10 % de 3.580 =	70 % de 3.000 =

¿Podrías encontrar el 60% de 450 de más de 2 formas distintas usando fracción de un número? Comenta con tus compañeros.

Método Nº 2: Por medio del 10%
Sabemos que el 10% de una cantidad corresponde a su décima parte, por ejemplo:

El 10 % de 80 es 8; El 10% de 500 es 50; el 10 % de 850 es 85
Cuando la cantidad termina en cero, el 10% es muy fácil de calcular.
Aprovechemos esto para encontrar el:
40 % de 70 Como el 40% = 4 veces el 10%, tendremos:
$4 \cdot 7 = 28$
Si el número no termina en cero, resulta un poquito más complicado pero de igual manera llegaremos al resultado
Eje. El 30 % de 98
El 10% de 98 es 9,8 (98 : 10)
Por lo tanto el 30% de 98 es:
3 veces el 10% de 98
Esto es: $3 \cdot 9{,}8 = 29{,}4$

Encuentra por este método los siguientes porcentajes:

90 % de 50 =	80 % de 30 =
20 % de 62 =	40 % de 120 =
70 % de 400 =	60 % de 310 =

¿Cómo encontrarías por este método el 45% de 300? Comenta con tus compañeros.

Método 3 Por regla de 3 simple
Este método ordena los datos en una tabla y aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad, esto es: El producto cruzado debe ser siempre el mismo.
Ejemplo: El 18 % de 46

Número	Porcentaje
46	100 %
X	18 %

Donde $100 \cdot X = 46 \cdot 18$

$$X = \frac{46 \cdot 18}{100}$$

$$X = 8{,}28$$

Encuentra los siguientes porcentajes por este método:

El 35 % de 420 =	El 25 % de 560 =
El 70 % de 670	El 24 % de 96
El 4 % de 48	El 90 % de 150

Después de haber ejercitado estos métodos ¿Cuál te resultó más sencillo?
¿Piensas que es importante dominar más de un método? ¿Por qué?

RESOLVIENDO PROBLEMAS.

Resuelve el siguiente problema por el método que estimes conveniente:

1) Marcela fue a comprar un polerón que costaba $ 24.500, pero al llegar a la tienda se encontró con que el producto había subido en un 30 %. ¿Cuánto tuvo que pagar Marcela?

2) Lee atentamente la siguiente situación problemática:

¿QUÉ DEBE HACER EL SEÑOR HERNÁNDEZ?

El señor Hernández desea comprar un celular que vio en una tienda la semana pasada. Cuando llegó a comprarlo, el vendedor le dijo que esperara porque en unos minutos más se rebajarían todos los celulares en un 20%.

Cuando llega a la caja a pagarlo, le dicen que por ser el día del padre y haber ido con su hijo, se le agregaría un 10% de descuento adicional.

Le dan a escoger 2 opciones:

- Hacerle el 20% de descuento al precio original y luego, sobre el precio nuevo hacerle el 10% de descuento adicional.
- Hacerle de una sola vez el 30% de descuento al precio original.

¿Qué le conviene más al sr. Hernández
Discute la situación en tu grupo y demuéstralo a través de un ejemplo.

1.4. Exponentes.

En esta sección estudiamos la regla de los exponentes. Iniciamos con la regla del producto para exponentes.

Usar la regla del producto para exponentes

Considere la multiplicación $x^3 \cdot x^5$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$x^3 \cdot x^5 = 1x \cdot x \cdot x2 \cdot 1x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x2 = x^8$$

Regla del producto para exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para multiplicar expresiones exponenciales, mantenga la base común y sume los exponentes.

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

EJEMPLO 1 | Simplifique. a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $d^5 \cdot d^8$ c) $h \cdot h^9$

Solución

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

c) $h \cdot h^9 = h^1 \cdot h^9 = h^{1+9} = h^{10}$

2 Usar la regla del cociente para exponentes

Considere la división $x^7 \div x^4$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$\frac{x^7}{x^4} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x \cdot x \cdot x = x^3$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la **regla del cociente para exponentes**.

Regla del cociente para exponentes

Si a es cualquier número real diferente de cero y m y n son enteros diferentes de cero, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Para dividir expresiones en forma exponencial, mantenga la base común y reste los exponentes.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

EJEMPLO 2 | Simplifique. **a)** $\frac{6^4}{6^2}$ **b)** $\frac{x^7}{x^3}$ **c)** $\frac{y^2}{y^5}$

Solución **a)** $\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$ x^2 y^2

3 Usar la regla del exponente negativo

Observe en el ejemplo 2 c) que la respuesta contiene un exponente negativo. Realice la parte c) nuevamente cancelando factores comunes.

$$\frac{y^2}{y^5} = \frac{\cancel{y} \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{1}{y^3}$$

Al reducir factores comunes y usar el resultado del ejemplo 2 c), podemos razonar que $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$. Éste es un ejemplo de la regla del exponente negativo.

Regla del exponente negativo

Para cualquier número real diferente de cero, a, y cualquier número entero no negativo, m,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Una expresión elevada a un exponente negativo es igual a 1 dividida entre la expresión con el signo del exponente cambiado.

EJEMPLO 3 | Escriba cada expresión sin exponentes negativos.

a) 7^{-2} b) $8a^{-1}$ c) $\frac{1}{c^{-5}}$

Solución

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

b) $8a^{-1} = 8 \cdot \frac{1}{a^1} = \frac{8}{a}$

c) $\frac{1}{c^{-5}} = 1 \div c^{-5} = 1 \div \frac{1}{c^5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{c^5}{1} = c^5$

Ahora resuelva el ejercicio 37

Sugerencia útil

En el ejemplo 3 c) mostramos que $\frac{1}{c^{-5}} = c^5$. En general, para cualquier número real diferente de cero a y cualquier entero no negativo m, $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$. Cuando un factor del numerador o del denominador está elevado a cualquier potencia, el factor puede moverse al otro lado de la fracción siempre y cuando el signo del exponente esté cambiado. Así, por ejemplo

$$\frac{2a^{-3}}{b^2} = \frac{2}{a^3b^2}, \qquad \frac{a^{-2}b^4}{c^{-3}} = \frac{b^4c^3}{a^2}$$

NOTA: Al usar este procedimiento, el signo de la base no cambia, sólo cambia el signo del exponente. Por ejemplo,

$$-c^{-3} = \frac{1}{-c^3} = -\frac{1}{c^3}$$

Por lo general, no dejamos expresiones exponenciales con exponentes negativos. *Cuando indicamos que una expresión exponencial se simplificará, queremos decir que la respuesta debe escribirse sin exponentes negativos o cero.*

EJEMPLO 4 | Simplifique. a) $\frac{5xz^2}{y^{-4}}$ b) $4^{-2}x^{-1}y^2$ c) $-3^3x^2y^{-5}$

Solución

a) $\frac{5xz^2}{y^{-4}} = 5xy^4z^2$

b) $4^{-2}x^{-1}y^2 = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot y^2 = \frac{y^2}{16x}$

c) $-3^3x^2y^{-5} = -27x^2 \cdot \frac{1}{y^5} = -\frac{27x^2}{y^5}$

Observe que las expresiones en el ejemplo 4 no incluyen sumas o restas. La presencia de un signo más o menos lo convierte en un problema muy diferente, como veremos en nuestro ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 | Simplifique. a) $4^{-1} + 6^{-1}$ b) $2 \cdot 3^{-2} + 7 \cdot 6^{-2}$

Solución

a)
$$4^{-1} + 6^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \quad \text{Regla del exponente negativo}$$
$$= \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \quad \text{Reescriba con el mínimo común denominador, 12.}$$
$$= \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

a) $$2 \cdot 3^{-2} + 7 \cdot 6^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 7 \cdot \frac{1}{6^2}$$ Regla del exponente negativo.

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{9} + \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{7}{36}$$

$$= \frac{8}{36} + \frac{7}{36}$$ Reescriba con el mínimo común denominador, 36.

$$= \frac{8+7}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Ahora resuelva el ejercicio 25

4 Usar la regla del exponente cero

La regla siguiente que estudiaremos es la **regla del exponente cero**. Cualquier número distinto de cero dividido entre sí mismo es 1. Por lo tanto,

$$\frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Por medio de la regla del cociente para los exponentes,

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0.$$

Como $x^0 = \frac{x^5}{x^5}$ y $\frac{x^5}{x^5} = 1$, entonces

$$x^0 = 1.$$

Regla del exponente cero

Si a es cualquier número real distinto de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

La regla del exponente cero ilustra que *cualquier número real distinto de cero con un exponente 0 es igual a 1*. Debemos especificar que a G 0, ya que 0^0 no es un número real.

EJEMPLO 6 | Simplifique (suponga que la base no es 0).

a) 162^0 b) $7p^0$ c) $-y^0$ d) $-18x + 9y2^0$

Solución

a) $162^0 = 1$
b) $7p^0 = 7 \cdot p^0 = 7 \cdot 1 = 7$
c) $-y^0 = -1 \cdot y^0 = -1 \cdot 1 = -1$
d) $-18x + 9y2^0 = -1 \cdot 18x + 9y2^0 = -1 \cdot 1 = -1$

Ahora resuelva el ejercicio 33

5 Usar la regla para elevar una potencia a una potencia

Considere la expresión $(x^2)^2$. Podemos simplificar esa expresión como sigue:

$$1x^22^2 = x^2 \cdot x^2 = x^{2+2} = x^6$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la **regla para elevar una potencia a una potencia** (también llamada **regla de la potencia**).

Elevar una potencia a una potencia (regla de la potencia)

Si a es un número real y m y n son enteros, entonces

$$1a^m2^n = a^{m \cdot n}$$

Para elevar una expresión exponencial a una potencia, mantenga la base y multiplique los exponentes.

$$1x^32^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$$

EJEMPLO 7 | Simplifique (suponga que la base no es 0).

a) 12^22^4

Solución

a) $12^22^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$

b) $1z^{-5}2^4 = z^{-5 \cdot 4} = z^{-20} = \frac{1}{z^{20}}$

c) $12^{-3}2^2 = 2^{-3 \cdot 2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Ahora resuelva el ejercicio 81

Sugerencia útil

Con frecuencia los estudiantes confunden la *regla del producto*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

con la *regla de la potencia*

$$1a^m2^n = a^{m \cdot n}$$

Por ejemplo $(x^3)^2 = x^6$, no x^5.

6 Usar la regla para elevar un producto a una potencia

Considere la expresión $(xy)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$1xy2^2 = 1xy21xy2 = x \cdot x \cdot y \cdot y = x^2y^2$$

Esta expresión también podría simplificarse usando la regla para elevar un producto a una potencia.

Elevar un producto a una potencia

Si a y b son números reales y m es un entero, entonces

$$1ab2^m = a^mb^m$$

Para elevar un producto a una potencia, eleve todos los factores dentro del paréntesis a la potencia fuera de los paréntesis.

EJEMPLO 8 | Simplifique. a) $1-9x^32^2$

Solución

a) $1-9x^32^2 = 1-92^21x^32^2 = 81x^6$

b) $13x^{-5}y^42^{-3} = 3^{-3}1x^{-5}2^{-3}1y^42^{-3}$ — Eleve un producto a una potencia.

$= \frac{1}{3^3} \cdot x^{15} \cdot y^{-12}$ — Regla del exponente negativo, regla de la potencia.

$= \frac{1}{27} \cdot x^{15} \cdot \frac{1}{y^{12}}$ — Regla del exponente negativo.

$= \frac{x^{15}}{27y^{12}}$

7 Usar la regla para elevar un cociente a una potencia

Considere la expresión $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta expresión también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar un cociente a una potencia**.

Elevar un cociente a una potencia

Si a y b son números reales y m es un entero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$$

Para elevar un cociente a una potencia, eleve todos los factores en el paréntesis al exponente fuera de los paréntesis.

EJEMPLO 9 | Simplifique a) $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3$ b) $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4}$

Solución

a) $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3 = \frac{5^3}{(x^2)^3} = \frac{125}{x^6}$

b) $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}(x^{-2})^{-4}}{(y^3)^{-4}}$ *Eleve un cociente a una potencia.*

$= \frac{2^{-4}x^8}{y^{-12}}$ *Regla de la potencia.*

$= \frac{x^8y^{12}}{2^4}$ *Regla del exponente negativo.*

$= \frac{x^8y^{12}}{16}$

Ahora trabajaremos algunos ejemplos que combinan varias propiedades. Siempre que la misma variable aparezca arriba y abajo de la barra de fracción, por lo general movemos la variable con el *exponente menor*. Esto tendrá como resultado que el exponente de la variable sea positivo cuando se aplique la regla del producto. Los ejemplos 10 y 11 ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 10 | Simplifique. a)

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4$$

Solución Con frecuencia, las expresiones exponenciales pueden simplificarse en más de una manera. En general, será más fácil simplificar primero la expresión dentro de los paréntesis.

a) $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2 = (3y^3)^2 = 9y^6$

b) $\left(\frac{5x^4y^{-2}}{10xy^3z^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{x^4 \cdot x^{-1}z}{2y^3 \cdot y^2}\right)^{-3}$ *Mueva x, y^{-2} y z^{-1} al otro lado de la barra de fracción y cambie los signos de sus exponentes.*

$= \left(\frac{x^3z}{2y^5}\right)^{-3}$ *Regla del producto.*

$= \left(\frac{2y^5}{x^3z}\right)^3$ *Tome el recíproco de la expresión dentro de los paréntesis y cambie el signo del exponente.*

$= \frac{2^3y^{5\cdot 3}}{x^{3\cdot 3}z^3}$ *Eleve un cociente a una potencia.*

$= \frac{8y^{15}}{x^9z^3}$

EJEMPLO 11 | Simplifique $\frac{(2p^{-4}q^3)^{-3}}{(p^{-5}q^4)^{-3}}$.

Solución Primero, utilice la regla de la potencia. Luego simplifique.

$\frac{(2p^{-4}q^3)^{-3}}{(p^{-5}q^4)^{-3}} = \frac{2^{-3}p^{12}q^{-18}}{p^{15}q^{-12}}$ *Regla de la potencia.*

$= \frac{q^{-18}\cdot q^{12}}{2^3p^{15}\cdot p^{-12}}$ *Mueva 2^{-3}, p^{12} y q^{-12} al otro lado de la barra de fracción y cambie los signos de sus exponentes.*

$= \frac{q^{-18+12}}{4p^{15-12}}$ *Regla del producto.*

$= \frac{q^{2}}{4p^{3}}$

| Ahora resuelva el ejercicio 115

Resumen de reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los enteros m y n:

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
Regla del cociente	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,	$a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$,	$a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1$,	$a \neq 0$
Elevar una potencia a una potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$	
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^mb^m$	
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$,	$b \neq 0$

1.5 Ejercicios de Aplicación

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.5

MathXL MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) Proporcione la regla del producto para exponentes.
   b) Explique la regla del producto.
2. a) Dé la regla del cociente para exponentes.
   b) Explique la regla del cociente.
3. a) Proporcione la regla del exponente cero.
   b) Explique la regla del exponente cero.
4. a) Proporcione la regla del exponente negativo.
   b) Explique la regla del exponente negativo.
5. a) Proporcione la regla para elevar un producto a una potencia.
   b) Explique la regla para elevar un producto a una potencia.
6. a) Proporcione la regla para elevar una potencia a una potencia.
   b) Explique la regla para elevar una potencia a una potencia.
7. a) Proporcione la regla para elevar un cociente a una potencia.
   b) Explique la regla para elevar un cociente a una potencia.
8. Si no aparece exponente en una variable o coeficiente, ¿cuál es su exponente?
9. Si $x^{-1} = 5$, ¿cuál es el valor de x? Explique.
10. Si $x^{-1} = y^{2}$, ¿a qué es igual x? Explique.
11. a) Explique la diferencia entre el opuesto de x y el recíproco de x.

Para las partes b) y c) considere

$$x^{-1}, \quad -x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^{-1}}.$$

   b) ¿Cuál representa (o es igual a) el *recíproco* de x?
   c) ¿Cuál representa el *opuesto* (o *inverso aditivo*) de x?
12. Explique por qué -2^{2} G $\frac{1}{1-22^{2}}$.

Práctica de habilidades

Evalúe cada expresión.

13. $2^{3} \cdot 2^{2}$
14. $3^{2} \cdot 3^{3}$
15. $\frac{3^{7}}{3^{5}}$
16. $\frac{8^{4}}{8^{2}}$
17. 9^{-2}
18. 5^{-3}
19. $\frac{1}{5^{-3}}$
20. $\frac{1}{3^{-2}}$
21. 15^{0}
22. 19^{0}
23. $12^{2}2^{2}$
24. $11^{2}2^{2}$
25. $11 \cdot 42^{2}$
26. $16 \cdot 52^{2}$
27. $a\frac{4}{7}b^{2}$
28. $a\frac{2}{5}b^{4}$

Evalúe cada expresión.

29. a) 3^{-2} b) $1-32^{-2}$ c) -3^{-2} d) $-1-32^{-2}$
30. a) 4^{-3} b) $1-42^{-3}$ c) -4^{-3} d) $-1-42^{-3}$
31. a) $a\frac{1}{2}b^{-1}$ b) $a-\frac{1}{2}b^{-1}$ c) $-a\frac{1}{2}b^{-1}$ d) $-a-\frac{1}{2}b^{-1}$
32. a) $a\frac{3}{4}b^{-2}$ b) $a-\frac{3}{4}b^{-2}$ c) $-a\frac{3}{4}b^{-2}$ d) $-a-\frac{3}{4}b^{-2}$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos. Suponga que todas las bases representadas por medio de variables son diferentes de cero.

33. a) $5x^{0}$ b) $-5x^{0}$ c) $1-5x2^{0}$ d) $-1-5x2^{0}$
34. a) $4y^{0}$ b) $14y2^{0}$ c) $-4y^{0}$ d) $1-4y2^{0}$
35. a) $3xyz^{0}$ b) $13xyz2^{0}$ c) $3x1yz2^{0}$ d) $31xyz2^{0}$
36. a) $x^{0} + y^{0}$ b) $1x + y2^{0}$ c) $x + y^{0}$ d) $x^{0} + y$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

37. $7y^{-3}$
38. $\frac{1}{x^{-1}}$
39. $\frac{9}{x^{-4}}$
40. $\frac{8}{5y^{-2}}$

Simplifique cada expresión y escriba la respuesta sin exponentes negativos.

49. $2^3 \cdot 2^{-1}$ 50. $a^3 \cdot a^5$ 51. $x^6 \cdot x^{-4}$ 52. $x^{-4} \cdot x^3$

53. $\frac{8^5}{8^3}$ 54. $\frac{4^2}{4^{-2}}$ 55. $\frac{7^{-3}}{7^{-2}}$ 56. $\frac{x^{-9}}{x^{-2}}$

57. $\frac{m^{-6}}{m^2}$ 58. $\frac{p^3}{p^{-6}}$ 59. $\frac{5w^{-2}}{w^{-7}}$ 60. $\frac{x^{-4}}{x^{-6}}$

Evalúe cada expresión.

73. a) $41a + b2^0$ b) $4a^0 + 4b^0$ c) $14a + 4b2^0$ d) $-4a^0 + 4b^0$

74. a) $-2^3 + 1 - 22^0$ b) $-2^8 - 1 - 22^0$ c) $-2^0 + 2^4$ d) $-2^2 - 2^2$

75. a) $4^{-1} - 3^{-1}$ b) $4^{-1} + 3^{-1}$ c) $2 \cdot 4^{-0} + 3 \cdot 5^{-1}$ d) $12 \cdot 42^{-2} + 13 \cdot 52^{-1}$

76. a) $5^{-2} + 4^{-1}$ b) $5^{-2} - 4^{-1}$ c) $3 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 4^{-1}$ d) $13 \cdot 52^{-1} - 12 \cdot 42^{-2}$

UNIDAD 2: CALCULO DEL INTERES

2.1. Interés Simple
2.1.1. Definición Interés simple
2.1.2. Clases de interés
2.1.3. Valor presente
2.1.4. Descuentos
2.1.5. Despeje de formulas
2.1.6. El Monto
2.2. Interés Compuesto
2.2.1. Definición Interés Compuesto
2.2.2. Cálculo de interés compuesto con acumulación de interés simple
2.2.3. Despeje de formulas
2.2.4. Valor Futuro
2.2.5. Valor presente
2.2.6. Monto con tiempo fraccionario
2.3. Tasa Nominal Efectiva Y Equivalente
2.3.1. Ecuación de valor equivalente
2.3.2. Ejercicios de aplicación

Resultado de Aprendizaje

Determina el cálculo del interés simple y compuesto y cuál es su importancia en las operaciones financieras.

DIAGRAMA DE APRENDIZAJE

SINTESIS.

El cálculo del interés permite determinar el rendimiento o costo del dinero en el tiempo. En el interés simple los intereses se calculan solo sobre el capital inicial, mientras que en el interés compuesto los intereses generados se reinvierten. El valor presente indica cuánto se debe invertir hoy para obtener un monto futuro, el descuento representa la diferencia entre el valor nominal y el valor actual, y el monto es la suma del capital más los intereses obtenidos.

2.1 Interés Simple

2.1.1 Definición

El interés simple se calcula únicamente sobre el capital inicial durante un tiempo determinado.
No se capitalizan los intereses generados.
Fórmula: $I = C \times i \times t$
Monto: $M = C + I$
Donde: C = capital, i = tasa de interés, t = tiempo.

Ejercicios Resueltos
Capital $2.000, tasa 5% anual, tiempo 3 años
Procedimiento:

$I = 2000 \times 0.05 \times 3 = \$300$
$M = 2000 + 300 = \$2.300$

Capital $1.500, tasa 8% anual, tiempo 2 años
Procedimiento:
$I = 1500 \times 0.08 \times 2 = \$240$
$M = 1500 + 240 = \$1.740$

Capital $2.500, tasa 6% anual, tiempo 4 años
Procedimiento:
$I = 2500 \times 0.06 \times 4 = \$600$
$M = 2500 + 600 = \$3.100$

Capital $3.000, tasa 7% anual, tiempo 5 años
Procedimiento:
$I = 3000 \times 0.07 \times 5 = \$1.050$
$M = 3000 + 1050 = \$4.050$

Capital $1.200, tasa 9% anual, tiempo 3 años
Procedimiento:
$I = 1200 \times 0.09 \times 3 = \$324$
$M = 1200 + 324 = \$1.524$

Ejercicios Propuestos
1. Capital $2.000, tasa 6% anual, tiempo 4 años
2. Capital $1.800, tasa 5% anual, tiempo 3 años

3. Capital \$2.500, tasa 7% anual, tiempo 2 años
4. Capital \$3.200, tasa 8% anual, tiempo 5 años
5. Capital \$1.500, tasa 9% anual, tiempo 3 años

Respuestas de Ejercicios Propuestos

Interés Simple

1. I = 2000 × 0.06 × 4 = \$480 → M = 2000 + 480 = \$2.480
2. I = 1800 × 0.05 × 3 = \$270 → M = 1800 + 270 = \$2.070
3. I = 2500 × 0.07 × 2 = \$350 → M = 2500 + 350 = \$2.850
4. I = 3200 × 0.08 × 5 = \$1.280 → M = 3200 + 1.280 = \$4.480
5. I = 1500 × 0.09 × 3 = \$405 → M = 1500 + 405 = \$1.905

2.1.2 CLASES DE INTERES SIMPLE

El interés se llama ordinario cuando se usa para su cálculo 360 días al año, mientras que será exacto si se emplean 365 o 366 días. En realidad, se puede afirmar que existen cuatro clases de interés simple, dependiendo si para el cálculo se usen 30 días al mes, o los días que señale el calendario. Con el siguiente ejemplo, se da claridad a lo expuesto con anterioridad.

Ejemplo 1

Una persona recibe un préstamo por la suma de \$ 200.000 para el mes de marzo, se cobra una tasa de interés de 20% anual simple. Calcular el interés (I), para cada una de las clases de interés simple.

Solución:

a) **Interés ordinario con tiempo exacto**. En este caso se supone un año de 360 días y se toman los días que realmente tiene el mes según el calendario. Este interés, se conoce con el nombre de interés bancario; es un interés más costoso y el que más se utiliza.

I=Cit=200.000x0.20x 31/360 = \$3.444.44

b) **Interés ordinario con tiempo aproximado**. En este caso se supone un año de 360 días y 30 días al mes. Se conoce con el nombre de interés comercial, se usa con frecuencia por facilitarse los cálculos manuales por la posibilidad de hacer simplificaciones

I=Cit=200.000 x0.20x 30/360 = \$3.333,33

c) **Interés exacto con tiempo exacto**. En este caso se utilizan 365 o 366 días al año y mes según calendario. Este interés, se conoce comúnmente con el nombre de interés racional, exacto o real, mientras que las otras clases de interés producen un error debido a las aproximaciones; el interés racional arroja un resultado exacto, lo cual es importante, cuando se hacen cálculos sobre capitales grandes, porque las diferencias serán significativas cuando se usa otra clase de interés diferente al

racional. Lo importante, es realizar cálculos de intereses que no perjudiquen al prestamista o al prestatario.

I=Cit=200.000 x0.20x 31/365 = \$3.397,26

d) Interés exacto con tiempo aproximado. Para el cálculo de éste interés se usa 365 o 366 días al año y 30 días al mes. No se le conoce nombre, existe teóricamente, no tiene utilización y es el más barato de todos.

I=Cit=200.000 x0.20x 30 /365 = \$3.287,71

Ejemplo 2

Calcular el interés comercial y real de un préstamo por \$ 150.000 al 30% por 70 días

Solución

a) Interés comercial.

I=Cit=150.000 x0.30x 70/360 = \$8.750

b) Interés real o exacto

I=pin= 150.000 x 0.30x 70/365 = \$8.630,14

Se observa que el interés comercial resulta más elevado que el interés real para el mismo capital, tasa de interés y tiempo. Esta ganancia adicional hace que el año comercial sea muy utilizado en el sector financiero y en el sector comercial que vende a crédito. Hay que recordar y dejar claro, que cuando el tiempo en un préstamo está dado en días, es indispensable convertir la tasa de interés anual a una tasa de interés por día. Cuando la tasa anual se convierte a tasa diaria usando el año de 365 días o 366 si es bisiesto como divisor en la fórmula del interés simple o del monto, el interés obtenido se llama interés real o interés exacto. El año de 365 días o 366 se conoce como año natural.

Cuando se lleva a cabo la conversión usando como divisor 360 días, se dice que se está usando el año comercial. En este caso, el interés obtenido se llama interés comercial o interés ordinario.

Si un problema no menciona de forma explícita cuál tipo de interés debe calcularse, entonces se supone que se trata del cálculo de un interés comercial.

2.1.3 Valor Presente

Definición: El valor presente (VP) es la cantidad de dinero que se debe invertir hoy para obtener un monto futuro (M) determinado, a una tasa de interés y en un plazo específico.

Fórmula: VP = M / (1 + i)^n

1) M = 10,000 ; i = 10% anual ; n = 2 años → VP = 8,264.46

2) M = 5,000 ; i = 8% semestral ; n = 4 semestres → VP = 3,674.93

3) M = 20,000 ; i = 12% anual ; n = 3 años → VP = 14,238.55

4) M = 8,500 ; i = 6% trimestral ; n = 8 trimestres → VP = 5,335.36

5) M = 12,000 ; i = 5% anual ; n = 5 años → VP = 9,404.70

2.1.4 Descuentos

Definición: El descuento es la cantidad que se resta de un valor futuro o nominal para conocer el valor actual que se pagará hoy.

Fórmulas: D = N × i × n ; A = N - D

1) N = 10,000 ; i = 12% ; n = 1 → D = 1,200 ; A = 8,800
2) N = 5,000 ; i = 8% ; n = 0.5 → D = 200 ; A = 4,800
3) N = 15,000 ; i = 10% ; n = 2 → D = 3,000 ; A = 12,000
4) N = 7,000 ; i = 6% ; n = 0.75 → D = 315 ; A = 6,685
5) N = 12,000 ; i = 9% ; n = 4 → D = 4,320 ; A = 7,680

2.1.5 Despeje de Fórmulas

Definición: El despeje de fórmulas consiste en aislar una variable dentro de una ecuación para poder calcularla.

1) M = C(1 + i)^n → C = M / (1 + i)^n
2) M = C(1 + in) → i = (M - C) / (C × n)
3) D = N × i × n → n = D / (N × i)
4) I = C × i × n → C = I / (i × n)
5) M = VP(1 + i)^n → n = ln(M / VP) / ln(1 + i)

2.1.6 El Monto

Definición: El monto (M) es el valor total que se obtiene al final de una inversión o préstamo, es decir, el capital inicial más los intereses.

Fórmulas: M = C(1 + i × n) [interés simple] ; M = C(1 + i)^n [interés compuesto]

1) C = 5,000 ; i = 10% ; n = 2 → M = 6,000
2) C = 10,000 ; i = 8% ; n = 3 → M = 12,597
3) C = 12,000 ; i = 5% ; n = 4 → M = 14,400
4) C = 8,000 ; i = 6% ; n = 6 → M = 11,348
5) C = 20,000 ; i = 9% ; n = 5 → M = 29,000

2.2 Interés Compuesto

El interés compuesto, es un sistema que capitaliza los intereses, por lo tanto, hace que el valor que se paga por concepto de intereses se incremente mes a mes, puesto que la base para el cálculo del interés se incrementa cada vez que se liquidan los respectivos intereses. El interés compuesto es aplicado en el sistema financiero; se utiliza en todos los créditos que hacen los bancos sin importar su modalidad. La razón de la existencia de este sistema, se debe al supuesto de la reinversión de los intereses por parte del prestamista.

2.2.1 Definición de Interés Compuesto

El interés compuesto es aquel en el que los intereses generados se acumulan al capital inicial, formando un nuevo capital que genera intereses en cada período.

Es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a calcular intereses, es decir, hay capitalización de los intereses. En otras palabras se podría definir como la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada periodo por la suma de los intereses vencidos. La suma total obtenida al final se conoce con el nombre de ***monto compuesto o valor futuro***. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina **interés compuesto** y para su cálculo se puede usar sin ningún problema la igualdad

(2.1) del capítulo anterior.

El interés compuesto es más flexible y real, ya que valora periodo a periodo el dinero realmente comprometido en la operación financiera y por tal motivo es el tipo de interés más utilizado en las actividades económicas.

Lo anterior, hace necesario una correcta elaboración del diagrama de tiempo y lo importante que es ubicar en forma correcta y exacta el dinero en el tiempo.

Por último, es conveniente afirmar que el interés compuesto se utiliza en la Ingeniería Económica, Matemática Financieras, Evaluación de Proyectos y en general por todo el sistema financiero colombiano.

Fórmula general: M = C(1 + i)^n

1) C=5,000 ; i=10% ; n=3 → M=6,655
2) C=8,000 ; i=12% ; n=2 → M=10,035
3) C=10,000 ; i=6% ; n=6 → M=14,185
4) C=3,000 ; i=5% ; n=8 → M=4,431
5) C=15,000 ; i=9% ; n=4 → M=21,174

Ejemplo

Una persona invierte hoy la suma de $ 100.000 en un CDT que paga el 7% cuatrimestral, se solicita mostrar la operación de capitalización durante dos años.

n	Periodo Cap. I	Inicial (C)	Interés Monto
0	100,000.0000	100,000.0000	0
1	100,000.0000	7,000.0000	107,000.0000
2	107,000.0000	7,490.0000	114,490.0000
3	114,490.0000	8,014.3000	122,504.3000
4	122,504.3000	8,575.3010	131,079.6010
5	131,079.6010	9,175.5721	140,255.1731
6	140,255.1731	9,817.8621	150,073.0352

En la tabla anterior, se aprecia que los intereses cuatrimestrales se calculan sobre el monto acumulado en cada periodo y los intereses se suman al nuevo capital para formar un nuevo capital para el periodo siguiente, es decir, se presenta capitalización de intereses, con el objeto de conservar el poder adquisitivo del dinero a través del tiempo.

Para el cálculo del interés se usó la fórmula: I=C.i.n , mientras que para el monto se utilizó: M=C+I ; ecuaciones que fueron definidas con anterioridad

2.2.2 Cálculo de interés compuesto con acumulación de interés simple

Cuando una inversión combina acumulación compuesta con simple (periodos irregulares): M = C(1 + i)^n(1 + i × fracción)

1) C=10,000 ; i=8% ; 2 años 3 meses → M=11,898
2) C=6,000 ; i=10% ; 1 año 6 meses → M=6,930
3) C=8,000 ; i=6% ; 3 semestres y medio → M=9,813
4) C=12,000 ; i=5% ; 2 años 9 meses → M=13,739
5) C=9,000 ; i=7% ; 1 año 4 meses → M=9,833

2.2.3 Despeje de fórmulas

Fórmula general:

$$M = C(1+i)^n$$

Despejes:

1. Para el capital (C):

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

2. Para la tasa (i):

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1$$

3. Para el tiempo (n):

$$n = \frac{\ln(M/C)}{\ln(1+i)}$$

2.2.4 Fórmulas despejadas:

C = M / (1 + i)^n

i = (M / C)^(1/n) - 1

n = ln(M / C) / ln(1 + i)

1) M=12,000 ; i=8% ; n=3 → C=9,525

2) M=15,000 ; C=10,000 ; n=2 → i=22.5%

3) M=8,000 ; C=5,000 ; i=10% → n=4.7 años

4) C=9,000 ; i=7% ; n=4 → M=11,778

5) M=18,000 ; C=12,000 ; i=12% → n=3.5 años

2.2.4 Valor Futuro

Fórmula: F = P(1 + i)^n

1) P=10,000 ; i=8% ; n=5 → VF=14,693

2) P=7,500 ; i=6% ; n=4 → VF=9,475

3) P=12,000 ; i=10% ; n=3 → VF=15,972

4) P=5,000 ; i=9% ; n=2 → VF=5,945

5) P=20,000 ; i=7% ; n=6 → VF=30,015

Consiste el calcular el valor equivalente de una cantidad P (capital inicial) después de estar ganando intereses por n periodos a una tasa de interés (i).

$$F = P\ (1 + i)^n$$

A través de ella se obtiene las demás variables

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

$$n = \frac{\log(\frac{F}{P})}{\log(1 + \mathrm{i})}$$

Ejercicios por temas

1. Una persona invierte hoy $1.000 en una corporación que le reconoce el 2% mensual, si esta persona retira mensualmente los intereses y en el mes 36 retira el capital, ¿Cuál es el diagrama económico?

2. Una persona hizo un préstamo de $5'000.000 en una corporación que cobra el 10% trimestral. Si el crédito se liquidó a un año. ¿Cuál es el diagrama económico?

3. El primero de febrero recibo un préstamo de $300.000 de un banco comercial y me comprometo a cancelarlo con 4 cuotas cada trimestre por valor de $90.000. ¿Cuál es el diagrama económico y cuánto pagué de intereses?

4. El primero de febrero compré maquinaría para crear mi empresa de confecciones por valor de $15'000.000, 6 meses más tarde vendí la mercancía por valor de $6'000.000. El primero de febrero del año siguiente vendí la mercancía al exterior por valor de $7'000.000 y me pagaron con el siguiente plan:

Cuota inicial de $3'000.000 y dos cuotas cada una de $2'000.000 a recibir 30 y 60 días después de la venta.

- Calcule el número de periodos entre las fechas de compra de la maquinaria y de la venta al exterior expresado en MESES, SEMESTRES Y AÑOS.
- Calcule el número de periodos entre la primera venta de mercancía y el último pago expresado en MESES, BIMESTRES, TRIMESTRES.

5. El Banco Popular otorga un crédito de $200.000 a 4 meses y a una tasa del 24% anual. ¿Qué interés simple se paga mensualmente? ¿Cuál es el total de los intereses?

- Despejar todas las variables.
- Calcular el valor futuro a interés simple

6. Hoy invertimos $1'000.000 en un certificado de depósito a término (CDT) a una tasa de interés del 3% mensual durante 6 meses. Y queremos saber ¿Cuánto recibió al cabo de los 6 meses?.

7. Elaborar el diagrama económico.
8. ¿Qué interés producen $50.000 en 12 meses al 2.35% mensual?
9. ¿Durante cuánto tiempo estuvo invertido un capital de $100.000 para que al 3% produjera

$87.000 de intereses?

10. Asumamos que tenemos 3 documentos para cobrar así:

$500.000 para el primero de mayo de 2.0XX

$1'050.000 para el primero de julio de 2.0XX

$350.000 para el primero de agosto de 2.0XX

y dadas nuestras necesidades de efectivo, no vemos en la obligación de entregarlos a un intermedio financiero que como producto de sus actividades obtiene rendimientos del 3.5% mensual.

La pregunta es: ¿Cuánto dinero esperamos recibir si la negociación la realizamos el primero de abril de 2.0XX?

11. ¿Cuál es el monto de $120.000 invertidos al 30% anual durante tres años y dos meses? (R/ $234.000)

12. ¿Cuánto se necesita depositar hoy en una corporación que reconoce el 3% mensual, para disponer de 5'000.000 al cabo de un año? (R/ $ 3'676.470)

13. Una persona hipoteca su propiedad y mensualmente paga $450.000 de interés, si la tasa de interés es el 3% mensual, ¿En cuánto la hipotecó?
(R/ $15'000.000)

14. En un préstamo de $5'000.000 a cuatro años se pacta un interés del 15% semestral los dos primeros años y el 16,5% semestral los dos últimos años. ¿Cuánto espera de interés en los 4 años? (R/ $6'300.000)

15. Una empresa tomó prestados en un banco $30'000.000 al 18% semestral, si cancelo a los 4 meses y 16 días. ¿Cuánto le liquidaron sólo de intereses? (R/ 4'080.000)

16. El 30 de junio compré un equipo de panadería por $450.000, el cual no utilicé, mes y medio después el vendí por $480.000 ¿Qué tasa de interés ganaron los dineros allí involucrados? ¿Cuánto recibí por intereses?
(R/ 4.4% mes, $30.000)

17. Un capital de $C invertido durante 6 meses en forma simple y al 2.5% mensual y luego al 3% durante otros 8 meses, dio una diferencia en los dos montos de $6.300 ¿Cuál fue el capital inicial? (R/ $70.000)

18. Un capital de $ X se convirtió en $16.320 a los 12 meses y a una tasa mensual del 3%.¿Qué interés produjo? (R/ I=$4.320)

19. Cierto capital invertido al 6% trimestral simple durante dos años, alcanzó un monto de $480.000. ¿Cuáles son sus intereses? (R/ $155.675.67)

20. Una caja de ahorros reconoce el 5% trimestral de interés simple. Si hoy deposito $250.000 ¿Cuánto tiempo debo esperar para retirar $325.000? (R/ 6 trimestres)

21. ¿Qué interés producen $500.000 en 5 meses al 2.5% mensual? (R/ 62.500)

21 a. Una persona recibe al final de cada mes y durante 10 meses la suma de $150.000; al inicio de los meses 3°, 4°, 5° y 9°, debe pagar $250.000. Elaborar el diagrama económico

21 b. Un televisor vale $500.000 y lo venden en las siguientes condiciones: cuota inicial de $150.000 y unas cuotas mensuales de $50.000, durante un año. Elaborar el diagrama económico

22. Una persona toma un préstamo de $1'850.930 a 15 meses y a una tasa del 3.5% mensual simple. En caso de mora el deudor debe pagar el 4% mensual. ¿Qué suma tendrá que pagar si cancela la deuda a los 2 años y 20 días? (R/ 3'533.425.37)

23. Un comerciante vende mercancías a crédito y cobra el 2% mensual simple. En abril 15 del 92 le facturó al señor Molina $200.000, en julio 30 del 92 le despachó $300.000 más de mercancías, en noviembre 30 del 92 se presentó el señor Molina a cancelar las dos facturas.
¿Cuánto debió pagar en total?

24. Si en las prenderías cobran el 10% mensual. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital de $80.000 invertidos en éste negocio? (R/ n=10)

25. Un préstamo de $450.000 a un año y tiene un interés el 2% mensual los 6 primeros meses y el 2.5% mensual los dos últimos 6 meses; todo éstos intereses serán cancelados al vencimiento de la obligación principal y no habrá intereses sobre los intereses. ¿Cuál será el total a pagar el año? (R/ 5'715.000)

26. Para el 15 de febrero dispongo de $100.000, el 1 de abril de $55.000 y el primero de julio de $65.800. Si cada uno de éstos dineros los consigno en sus fechas, en una caja de ahorros que me paga el 2.5% mensual simple. ¿Cuánto dinero podré retirar el 30 de noviembre? (R/ $263.775)

27. Deseo disponer al finalizar el año de $675.000 para mis vacaciones. ¿Cuánto debo depositar el 1° de marzo en una entidad que reconoce el 2% mensual simple? (R/ 562.500)

28. Un contribuyente tiene una renta líquida gravable de $33'650.000 y debe pagar $10'969.900 de impuestos. ¿Qué tasa paga? (R/ 32.6%)

29. Se copra un lote de terreno por valor de $9'000.000 esperando venderlo dentro de un año en $12.000.000. ¿Cuál es la tasa de interés que le rinden los dineros allí involucrados? (R/ 2.7%)

2.2.5 Valor Presente

Fórmula: VP = VF / (1 + i)^n

1) VF=15,000 ; i=10% ; n=3 → VP=11,279
2) VF=8,000 ; i=6% ; n=2 → VP=7,122
3) VF=20,000 ; i=9% ; n=4 → VP=14,172
4) VF=10,000 ; i=5% ; n=5 → VP=7,835
5) VF=30,000 ; i=12% ; n=3 → VP=21,365

2.2.6 Monto con tiempo fraccionario

Fórmula: M = C(1 + i)^t, donde t puede ser fraccionario (por ejemplo 2.5 años).

1) C=10,000 ; i=10% ; t=2.5 → M=12,153
2) C=8,000 ; i=8% ; t=1.5 → M=8,987
3) C=12,000 ; i=6% ; t=3.25 → M=14,301
4) C=6,500 ; i=9% ; t=1.75 → M=7,587
5) C=9,000 ; i=7% ; t=4.5 → M=11,857

2.3 Tasa Nominal, Efectiva y Equivalente

La tasa nominal es una tasa de interés anual base que no tiene en cuenta la capitalización de intereses. La tasa efectiva es la tasa real que se paga o se gana en un período, considerando la capitalización de intereses; es decir, el efecto de los intereses sobre intereses. Las tasas equivalentes son diferentes tasas de interés que producen el mismo monto de interés en el mismo periodo de tiempo.

2.3.1 Ecuación de valor equivalente

Dos capitales son equivalentes si tienen el mismo valor presente o futuro bajo una misma tasa.

Ecuación: C1(1 + i1)^n1 = C2(1 + i2)^n2

1) 10,000(1.12)^2 = C(1.10)^3 → C=9,428
2) 8,000(1.08)^4 = C(1.10)^3 → C=8,174
3) 6,000(1.06)^5 = C(1.09)^3 → C=6,206
4) 12,000(1.07)^2 = C(1.05)^3 → C=11,872
5) 15,000(1.10)^1 = C(1.08)^2 → C=14,150

2.3.2 Ejercicios de aplicación (con respuestas)

1) Inversión de 5,000 al 8% durante 3 años → M=6,299
2) Capital para obtener 20,000 en 4 años al 10% → C=13,660

3) Tiempo para que 12,000 sean 18,000 al 12% → n=3.56 años

4) Préstamo de 10,000 al 9% semestral por 6 semestres → M=16,895

5) Valor presente de 15,000 a 3 años al 7% → VP=12,245

UNIDAD 3: ANUALIDADES

3.1. Nomenclatura
3.2. Anualidades vencidas
3.3. Anualidades anticipadas
3.4. Fórmulas para cálculo de anualidades anticipadas
3.5. Ejercicios de aplicación.
3.6. Anualidades diferidas
3.7. Anualidades perpetuas
3.8. Ejercicios de aplicación

Resultado de Aprendizaje

Interpreta el concepto y utilización de las anualidades y amortizaciones financieras.

DIAGRAMA DE APRENDIZAJE

SINTESIS.

Las anualidades son una sucesión de pagos o cobros iguales efectuados en intervalos regulares de tiempo.

La nomenclatura permite identificar los elementos de una anualidad, como monto, valor presente, tasa y número de periodos.

Las anualidades vencidas se pagan al final de cada período, mientras que las anticipadas al inicio, aplicando fórmulas específicas para calcular su valor presente o futuro.

Las anualidades diferidas comienzan después de un tiempo de espera, y las perpetuas son pagos infinitos en el tiempo.

Los ejercicios de aplicación permiten comprender el uso práctico de las fórmulas y su relación con operaciones financieras reales.

3.1. Nomenclatura

En las anualidades se utilizan ciertos símbolos o letras que representan los elementos principales de los cálculos financieros:

- **A o R:** Renta o pago periódico (cantidad constante que se paga o recibe en cada período).
- **i:** Tasa de interés por período.
- **n:** Número total de periodos.
- **VF o M:** Valor futuro o monto total acumulado.
- **VP o P:** Valor presente o capital equivalente actual.
- **g:** Crecimiento o variación de la renta (en anualidades crecientes o decrecientes).

Estos elementos permiten aplicar las fórmulas adecuadas según el tipo de anualidad.

DEFINICIÓN DE ANUALIDAD

Una anualidad es una serie de flujos de cajas iguales o constantes que se realizan a intervalos iguales de tiempo, que no necesariamente son anuales, sino que pueden ser diarios, quincenales o bimensuales, mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, anuales. Las anualidades se simbolizan con la letra A.

El concepto de anualidad, es importante en el área de las finanzas, entre otras consideraciones, porque es el sistema de amortización más utilizado en las instituciones financieras en sus diferentes modalidades de créditos. Además, es muy frecuente que las transacciones comerciales se realicen mediante una serie de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo, en vez de un pago único realizado al final del plazo establecido en la negociación.

Es conveniente, antes de seguir con el estudio de las anualidades, tener en cuenta las definiciones de los siguientes términos:

Renta o Pago

Es un pago periódico que se efectúa de manera igual o constante. A la renta también se le conoce con el nombre: cuota, depósito. Cualquier de estos términos pueden ser utilizados en lugar de anualidad.

Periodo de Renta

Es el tiempo que transcurre entre dos pagos periódicos consecutivos o sucesivos. El periodo de renta puede ser anual, semestral, mensual, etc.

Plazo de una anualidad.

Es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer período de pago y el final del último período de pago.

3.2. Anualidades vencidas.

Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al final de cada periodo, por ejemplo, el salario mensual de un trabajador, en general las cuotas mensuales iguales que se generan en todo tipo de transacciones comerciales, como la compra de vehículos, electrodomésticos, etc.

Una anualidad vencida es aquella en la que los pagos o cobros se realizan al final de cada período. Cada pago o depósito se acumula durante los períodos siguientes, generando intereses hasta el final del plazo.

Las anualidades vencidas son las más comunes en operaciones financieras, como:

- Pago de préstamos (cuotas mensuales)
- Depósitos periódicos en cuentas de ahorro
- Amortización de deudas
- Planes de inversión o ahorro programado

Características principales

1. Pagos periódicos iguales (R): el valor de cada cuota es constante.
2. Intervalos regulares de tiempo: mensual, trimestral, semestral, anual, etc.
3. Pagos al final del período: cada renta se realiza después de haber transcurrido el tiempo.
4. Tasa de interés (i): aplicada según la periodicidad de los pagos.
5. Duración (n): cantidad total de períodos.
6. Se puede calcular el valor futuro (VF) o el valor presente (VP).

Fórmulas fundamentales

a) Valor Futuro o Monto (VF):

VF = R × ((1 + i)^n - 1) / i

b) Valor Presente (VP):

VP = R × (1 - (1 + i)^(-n)) / i

Interpretación

- El valor futuro (VF) indica cuánto dinero se tendrá al final del plazo si se realizan depósitos periódicos iguales.
- El valor presente (VP) indica cuánto vale hoy una serie de pagos futuros equivalentes a una misma anualidad.

Ejemplo 1: Cálculo del Valor Futuro

Una persona deposita $200 mensuales en una cuenta que paga una tasa del 12% anual capitalizable mensualmente, durante 3 años.

Datos:

R = 200

i = 12% / 12 = 0.01

n = 3 × 12 = 36

VF = 200 × ((1.01)^36 - 1) / 0.01

VF = 200 × 43.077 = 8,615.40

Valor futuro = $8,615.40

Ejemplo 2: Cálculo del Valor Presente

Se desea saber qué capital debe depositarse hoy para poder pagar $500 al final de cada semestre durante 4 años, con una tasa de 10% anual capitalizable semestralmente

.Datos:

R = 500

i = 10% / 2 = 0.05

n = 4 × 2 = 8

VP = 500 × (1 - (1.05)^(-8)) / 0.05

VP = 500 × 6.4632 = 3,231.60

Valor presente = $3,231.60

Ejemplo 3: Determinar la Renta (R)

Se desea acumular $10,000 en 5 años realizando depósitos trimestrales a una tasa de 8% anual capitalizable trimestralmente.

Datos:

VF = 10,000

i = 8% / 4 = 0.02

n = 5 × 4 = 20

R = (VF × i) / ((1 + i)^n - 1)

R = (10,000 × 0.02) / ((1.02)^20 - 1)

R = 411.50

La renta trimestral es $411.50

Ejercicios Anualidades vencidas

1. Una persona deposita $150 mensuales durante 2 años a una tasa del 9% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el monto acumulado?
2. ¿Cuál será el monto acumulado de una inversión con depósitos trimestrales de $800 durante 5 años al 10% anual (capitalizable trimestralmente)?
3. ¿Cuánto debe depositarse hoy para pagar $400 al final de cada mes durante 3 años, si la tasa es del 12% anual capitalizable mensualmente?
4. Determine el valor presente de una anualidad de $2,000 semestrales durante 4 años al 14% anual capitalizable semestralmente.
5. Se desean acumular $15,000 en 6 años con pagos anuales iguales al 8% anual. Calcule la renta anual necesaria.
6. Una persona ahorra $100 mensuales durante 4 años a una tasa del 6% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el valor futuro?
7. Calcule el valor presente de una serie de pagos de $500 trimestrales durante 3 años con una tasa del 10% anual capitalizable trimestralmente.
8. ¿Cuánto dinero se acumulará si se invierten $250 al final de cada mes durante 2 años a una tasa del 18% anual capitalizable mensualmente?
9. Una persona desea tener $12,000 al final de 5 años, haciendo pagos semestrales a una tasa del 8% anual (capitalizable semestralmente). ¿Cuánto debe depositar cada semestre?

10. ¿Cuál es el valor actual de recibir $1,000 al final de cada año durante 10 años si la tasa es del 10% anual?

Respuestas

1. $3,904.40
2. $20,386.40
3. $10,645.50
4. $12,806.40
5. $1,886.10
6. $5,637.10
7. $5,478.20
8. $6,576.30
9. $1,933.00
10. $6,144.60

3.3. Anualidades anticipadas.

Una anualidad anticipada es aquella en la que los pagos o cobros se realizan al inicio de cada período, en lugar de al final.

Esto significa que el primer pago se efectúa inmediatamente, generando un período adicional de intereses respecto a la anualidad vencida.

Ejemplos de anualidades anticipadas en la vida real

- Pagos de arriendo o alquiler, que se pagan al comenzar el mes.
- Primas de seguros, que se cancelan antes de recibir la cobertura.
- Matrículas educativas, pagadas antes de iniciar el ciclo.
- Planes de ahorro programado que inician con un primer depósito inmediato.

Diferencias con la anualidad vencida

Concepto	Anualidad vencida	Anualidad anticipada
Momento del pago	Al final del período	Al inicio del período
Generación de intereses	Un período menos	Un período más

Valor presente y futuro	Menor	Mayor
Ejemplo típico	Cuotas de préstamo	Renta de alquiler

Elementos principales de la anualidad anticipada

R: pago o renta periódica

i: tasa de interés por período

n: número total de períodos

VF: valor futuro o monto total acumulado

VP: valor presente o equivalente actual

Fórmulas fundamentales

1. Valor Futuro (VF):

$$VF = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$$

2. Valor Presente (VP):

$$VP = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)$$

Interpretación

En una anualidad anticipada, el dinero empieza a generar intereses desde el primer pago, lo que hace que el valor futuro sea más alto que el de una anualidad vencida equivalente.
Igualmente, el valor presente es mayor porque se paga antes cada cuota.

Ejemplo 1: Cálculo del Valor Futuro (VF)

Una persona deposita $300 al inicio de cada mes durante 2 años, en una cuenta que paga 12% anual capitalizable mensualmente.
Calcular el valor futuro.

Datos:

R = 300

i = 12% / 12 = 0.01

n = 2 × 12 = 24

Fórmula:

$$VF = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$$

Sustituyendo:

$$VF = 300 \times \frac{(1.01)^{24} - 1}{0.01} \times (1.01)$$

Respuesta: Valor futuro = $8,127.60

Ejemplo 2: Cálculo del Valor Presente (VP)

Un arrendatario pagará $800 al inicio de cada trimestre durante 3 años, con una tasa del 8% anual capitalizable trimestralmente.

Calcule el valor presente de la anualidad.

Datos:

R = 800

i = 8% / 4 = 0.02

n = 3 × 4 = 12

Fórmula:

$$VP = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)$$

Sustituyendo:

$$VP = 800 \times \frac{1-(1.02)^{-12}}{0.02} \times (1.02)$$

Respuesta: Valor presente = $8,629.60

Ejemplo 3: Determinar la Renta (R)

Se desea tener un capital de $20,000 al final de 4 años, realizando depósitos anticipados trimestrales en una cuenta que paga 10% anual capitalizable trimestralmente.

¿Cuánto se debe depositar al inicio de cada trimestre?

Datos:

VF = 20,000

i = 10% / 4 = 0.025

n = 4 × 4 = 16

Fórmula:

$$VF = R \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i} \times (1+i)$$

Despejando **R**:

$$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^{n}-1] \times (1+i)}$$

Sustituyendo:

$$R = \frac{20,000 \times 0.025}{[(1.025)^{16}-1] \times 1.025}$$

R = 996.00

Respuesta: Renta trimestral = $996.00

Ejercicios Anualidades Anticipadas

1. Una persona deposita $200 al inicio de cada mes durante 3 años en una cuenta que paga 10% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el valor futuro acumulado?
2. Una empresa paga $1,000 al inicio de cada trimestre durante 5 años, a una tasa del 8% anual capitalizable trimestralmente. Calcule el monto total acumulado.
3. Un estudiante deposita $150 al inicio de cada mes durante 2 años en una cuenta que genera el 12% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el valor futuro?
4. Calcule el valor presente de una anualidad anticipada de $2,500 semestrales durante 4 años, con una tasa de 10% anual capitalizable semestralmente.
5. Se desea reunir $10,000 al final de 3 años, realizando depósitos anticipados mensuales en una cuenta al 9% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto se debe depositar cada mes?
6. Una persona desea recibir $800 al inicio de cada trimestre durante 2 años, con una tasa del 6% anual capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es el valor presente?
7. Un comerciante deposita $500 al inicio de cada mes durante 5 años en una cuenta que paga 15% anual capitalizable mensualmente. Determine el monto final acumulado.
8. Una familia paga una renta anticipada de $600 mensuales durante 2 años, con una tasa del 8% anual capitalizable mensualmente. Determine el valor presente de esta anualidad.
9. Un inversionista desea acumular $50,000 al final de 6 años realizando depósitos anticipados semestrales, con una tasa del 10% anual capitalizable semestralmente. Determine la renta necesaria por semestre.
10. ¿Cuál será el monto acumulado si se invierten $250 al inicio de cada mes durante 4 años a una tasa del 12% anual capitalizable mensualmente?

Respuestas

1. $8,648.20
2. $24,010.00
3. $4,034.00
4. $8,658.30
5. $253.70
6. $5,959.50
7. $43,520.00

8. \$12,995.00
9. \$3,284.00
10. \$13,578.50

3.4. Fórmulas para cálculo de anualidades anticipadas

Una anualidad anticipada es aquella en la que los pagos o cobros se realizan al inicio de cada periodo, a diferencia de las anualidades vencidas, en las cuales los pagos se hacen al final.
Por tanto, cada pago en una anualidad anticipada genera un período adicional de intereses, haciendo que el valor presente y el valor futuro sean mayores.

Elementos básicos

Símbolo	**Significado**
R	Renta
i	Tasa de interés por periodo
n	Número total de periodos
VP	Valor presente de la anualidad
VF	Valor futuro o monto acumulado

Relación con la anualidad vencida

Una anualidad anticipada puede expresarse como una anualidad vencida **multiplicada por (1 + i)**, porque cada pago gana un período más de interés.

$$VF_{\text{anticipada}} = VF_{\text{vencida}} \times (1+i)$$
$$VP_{\text{anticipada}} = VP_{\text{vencida}} \times (1+i)$$

Fórmulas principales

1. Valor Futuro (VF)

$$VF = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)$$

Interpretación:

Se calcula primero el valor futuro como si fuera una anualidad vencida, y luego se multiplica por: $(1 + i)$ para considerar que los pagos se realizan al inicio del período.

2. Valor Presente (VP)

$$VP = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)$$

3. Renta (R) cuando se conoce el Valor Futuro

$$R = \frac{VF \times i}{((1+i)^n - 1) \times (1+i)}$$

4. Renta (R) cuando se conoce el Valor Presente

$$R = \frac{VP \times i}{(1-(1+i)^{-n}) \times (1+i)}$$

3.5. Ejercicios de aplicación.

Ejemplo 1: Cálculo del Valor Futuro

Una persona deposita $400 al inicio de cada mes durante 2 años, en una cuenta que paga 12% anual capitalizable mensualmente.

Calcular el valor futuro (VF).

Datos:

- R = 400
- i = 12% / 12 = 0.01
- n = 2 × 12 = 24

$$VF = 400 \times \frac{(1.01)^{24} - 1}{0.01} \times (1.01)$$

$$VF = 400 \times 27.092 \Rightarrow VF = 10,836.80$$

Respuesta: El valor futuro es $10,836.80

Ejemplo 2: Cálculo del Valor Presente

Una persona pagará $1,200 al inicio de cada trimestre durante 5 años, con una tasa del 8% anual capitalizable trimestralmente.

Calcular el valor presente (VP).

Datos:

- R = 1,200
- i = 8% / 4 = 0.02
- n = 5 × 4 = 20

$$VP = 1,200 \times \frac{1-(1.02)^{-20}}{0.02} \times (1.02)$$

$$VP = 1,200 \times 17.815 \Rightarrow VP = 21,378.00$$

Respuesta: El valor presente es $21,378.00

Ejemplo 3: Determinación de la Renta

Una persona desea acumular $25,000 al final de 4 años, haciendo depósitos anticipados mensuales en una cuenta que paga 9% anual capitalizable mensualmente.

Calcular la renta mensual (R).

Datos:

- VF = 25,000
- i = 9% / 12 = 0.0075
- n = 4 × 12 = 48

$$R = \frac{25,000 \times 0.0075}{((1.0075)^{48}-1) \times (1.0075)}$$

$$R = \frac{187.5}{0.440} = 426.90$$

3.6. Anualidades diferidas.

Son aquellas en las cuales la serie de flujos de caja (Ingresos ó Desembolsos), se dan a partir de un periodo de gracia. Este se puede dar de dos maneras: a) Periodo de gracia muerto, b) Periodo de gracia con cuota reducida.

En el periodo de gracia muerto, no hay abonos a capital, ni pagos de interés, lo que implica que el valor de obligación financiera al final del periodo de gracia se acumula por efecto de los intereses, incrementándose el saldo de la obligación financiera, por lo tanto, a partir de este nuevo valor se determina el valor de la cuota ó de la anualidad (A).

En el periodo de gracia con cuota reducida, se hacen pagos de intereses, pero no abono al capital, por lo cual, el valor de la obligación financiera, no cambia por efecto de los intereses, ya que estos se han venido cancelando a través del tiempo, por lo tanto, el valor de la obligación financiera al final del periodo de gracia, es el inicial, y a partir de él, se calcula ó se determina el valor de la cuota ó de la anualidad (A)

Para el cálculo del valor presente y del valor futuro de una anualidad diferida, se pueden utilizar las expresiones que se demostraran para las anualidades vencidas y anticipadas, posteriormente; sé vera como se pueden adaptar las fórmulas para aplicarlas sobre las anualidades diferidas.

Una anualidad diferida es aquella en la que los pagos no comienzan de inmediato, sino después de un tiempo determinado (llamado *período de diferimiento* o *plazo de gracia*).

Durante ese tiempo, no se realizan pagos, aunque el dinero puede seguir generando o acumulando intereses.

En otras palabras, la anualidad diferida es una anualidad ordinaria (o anticipada) que empieza después de cierto número de períodos de espera.

Ejemplos comunes de anualidades diferidas

- Un fondo de jubilación en el que los pagos comienzan varios años después de realizar las aportaciones.
- Un préstamo que otorga un período de gracia antes de iniciar los pagos.
- Un seguro que paga beneficios después de cierto tiempo de ocurrido el evento asegurado.
- Una inversión donde los cobros se inician en una fecha futura establecida.

Elementos de la anualidad diferida

Símbolo	**Significado**
R	Renta o pago periódico
i	Tasa de interés por período
n	Número de pagos o períodos de la anualidad
m	Número de períodos de diferimiento
VP	Valor presente de la anualidad
VF	Valor futuro o monto acumulado

Estructura del cálculo

El cálculo de una anualidad diferida se realiza en dos etapas:

1. Se calcula el valor presente de la anualidad como si iniciara inmediatamente (una anualidad vencida o anticipada).

2. Ese valor se descuenta (lleva al presente real) considerando el tiempo de diferimiento m.

Fórmulas de las anualidades diferidas
Valor Presente (VP) de una anualidad diferida

$$VP = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)^{-m}$$

Donde:

- m= número de periodos de diferimiento
- Si es **anticipada diferida**, se multiplica por un factor adicional de $(1+i)^r$

Valor Futuro (VF) de una anualidad diferida

$$VF = R \times \frac{(1+i)^{n}-1}{i} \times (1+i)^{m}$$

El monto futuro se calcula proyectando los pagos a partir del momento en que inician y luego acumulándolos hasta el final del periodo total (incluido el diferimiento).

Ejemplo 1: Valor presente de una anualidad diferida

Una persona recibirá $1,500 al final de cada trimestre durante 5 años, pero los pagos comenzarán **después de 2 años.**

La tasa de interés es del **8% anual capitalizable trimestralmente**.

Calcular el **valor presente (VP)**.

Datos:

- R = 1,500
- i = 8% / 4 = 0.02
- n = 5 × 4 = 20
- m = 2 × 4 = 8

Aplicamos la fórmula:

$$VP = 1,500 \times \frac{1-(1.02)^{-20}}{0.02} \times (1.02)^{-8}$$

$$VP = 1,500 \times 16.351 \times 0.853 \Rightarrow VP = 1,500 \times 13.951 = 20,926.50$$

Respuesta: Valor presente = $20,926.50

Ejemplo 2: Valor futuro de una anualidad diferida

Una persona invertirá en un fondo que comenzará a pagarle \$2,000 cada semestre durante 4 años, pero los pagos comenzarán después de 3 años.

La tasa de interés es del 10% anual capitalizable semestralmente.

Calcular el valor futuro (VF).

Datos:

- R = 2,000
- i = 10% / 2 = 0.05
- n = 4 × 2 = 8
- m = 3 × 2 = 6

Aplicamos la fórmula:

$$VF = 2,000 \times \frac{(1.05)^{8} - 1}{0.05} \times (1.05)^{6}$$

$$VF = 2,000 \times 9.549 \times 1.340 \Rightarrow VF = 2,000 \times 12.80 = 25,600.00$$

Respuesta: Valor futuro = \$25,600.00

Ejemplo 3: Determinar la renta (R)

Una persona desea tener \$40,000 al final de 8 años, mediante pagos anuales iguales que comienzan después de 2 años de espera.

La tasa de interés es del 9% anual.

Calcular el valor de la renta anual (R).

Datos:

- VF = 40,000
- i = 0.09
- n = 8
- m = 2

$$R = \frac{VF}{\frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^m}$$

$$R = \frac{40,000}{\frac{(1.09)^{\text{[illegible]}} - 1}{0.09} \times (1.09)^2}$$

$$R = \frac{40,000}{10.685 \times 1.1881} = \frac{40,000}{12.67} = 3,157.00$$

Respuesta: La renta anual es $3,157.00

Ejercicios — Anualidades Diferidas

1. Una persona recibirá $1,000 al final de cada trimestre durante 4 años, pero los pagos empezarán después de 1 año.

   La tasa de interés es del 8% anual capitalizable trimestralmente.

   ¿Cuál es el valor presente?

2. Una empresa invertirá en un fondo que comenzará a pagarle $5,000 anuales durante 6 años, empezando después de 3 años.

   La tasa de interés es del 10% anual.

   Calcular el valor presente.

3. Una persona desea reunir $30,000 al final de 5 años, mediante depósitos semestrales iguales que comienzan después de 2 años.

   La tasa es del 12% anual capitalizable semestralmente.

   ¿Cuál debe ser el valor de cada depósito?

4. Calcular el valor futuro de una anualidad con pagos de $800 mensuales durante 3 años, con un diferimiento de 6 meses, a una tasa del 9% anual capitalizable mensualmente.

5. Se desea conocer el valor presente de una renta de $2,500 anuales durante 10 años, que empezará a pagarse dentro de 3 años.

   La tasa de interés es del 7% anual.

6. Un inversionista deposita dinero para recibir $4,000 semestrales durante 5 años, pero los pagos inician después de 2 años.

   Si la tasa de interés es 10% anual capitalizable semestralmente, determine el valor presente.

7. ¿Cuánto dinero se acumulará al final de 8 años si una persona deposita $600 trimestrales durante 4 años, pero comenzando los depósitos al cabo de 2 años?

La tasa es del 8% anual capitalizable trimestralmente.

8. Una persona desea obtener $50,000 al final de 10 años, realizando aportes anuales iguales que inician después de 2 años.

   La tasa de interés es del 9% anual.

   Calcule la renta anual.

9. Calcule el valor futuro de una anualidad diferida en la que se pagan $1,200 mensuales durante 2 años, pero los pagos comienzan 1 año después.

   Tasa de interés: 10% anual capitalizable mensualmente.

10. Una empresa ofrece a sus empleados una renta de jubilación de $3,000 mensuales durante 5 años, pero el primer pago se hace dentro de 2 años.

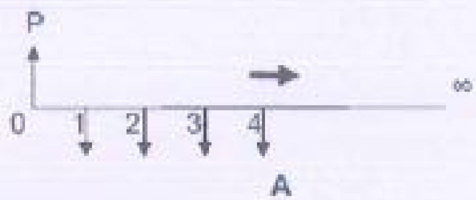
    Si la tasa de interés es del 12% anual capitalizable mensualmente, calcule el valor presente de la renta.

Respuestas

1. $13,960.00
2. $21,213.00
3. $2,188.00
4. $32,575.00
5. $16,085.00
6. $13,980.00
7. $11,275.00
8. $3,250.00
9. $33,875.00
10. $136,750.00

3.7. Anualidades perpetuas.

Una anualidad perpetua es aquella en la que no existe el último pago, o aquella que tiene infinito números de pagos. Teniendo en cuenta que en este mundo todo tiene fin, se puede definir, que una anualidad indefinida o perpetuas, es aquella que tiene muchos flujos de caja (ingresos o desembolsos), como ejemplos, se podrían citar las cuotas de mantenimiento de una carretera o de un puente, o una inversión a muy largo plazo donde solo se retiran los intereses, claro, suponiendo que éstos son iguales en cada uno de los períodos. En esta anualidad, solo existe valor presente que viene a ser finito, porque el valor futuro o monto será infinito por suponerse que los flujos de caja son indefinidos. En realidad las anualidades perpetuas o indefinidas no existen. La anualidad perpetua vencida se representa en un diagrama económico de la siguiente manera:



Una anualidad perpetua es una serie infinita de pagos iguales efectuados a intervalos regulares, sin fecha final.
En otras palabras, los pagos se realizan indefinidamente en el tiempo.

Este tipo de anualidades se usa comúnmente en casos como:

- Pensiones o rentas vitalicias.
- Acciones preferentes que pagan dividendos fijos.
- Fondos de becas o donaciones perpetuas.

Fórmula general

El **valor presente (VP)** de una anualidad perpetua se calcula con:

$$VP = \frac{R}{i}$$

Donde:

- VP: valor presente de la anualidad perpetua
- R: pago periódico constante
- i: tasa de interés por período

Características principales

1. No tiene vencimiento: los pagos continúan infinitamente.
2. La tasa de interés debe ser constante.
3. Todos los pagos son iguales y equidistantes en el tiempo.
4. El valor presente se basa únicamente en el primer pago y la tasa de interés.

Ejemplo 1

Una fundación quiere crear una beca que otorgue $1,200 cada año de manera perpetua.

Si la tasa de interés anual es del 6%, ¿cuánto dinero se debe depositar hoy para financiarla?

Datos:

- $R = 1{,}200$
- $i = 6\% = 0.06$

Aplicamos la fórmula:

$$VP = \frac{R}{i} = \frac{1{,}200}{0.06} = 20{,}000$$

Se debe depositar **$20,000** hoy para sostener la beca de manera perpetua.

Ejemplo 2

Un inversionista compra una acción preferente que paga un dividendo fijo de **$75 al año**, de manera indefinida.

Si desea obtener una rentabilidad del **5% anual**, ¿cuál es el valor máximo que debería pagar por la acción?

Datos:

- $R = 75$
- $i = 5\% = 0.05$

$$VP = \frac{R}{i} = \frac{75}{0.05} = 1{,}500$$

El valor máximo que debe pagar por la acción es **$1,500**.

Ejemplo 3 (Perpetuidad diferida)

Una perpetuidad comenzará a pagar **$2,000 anuales**, pero **dentro de 3 años**.

La tasa de interés es del **8% anual.**

¿Cuál es su valor presente hoy?

Paso 1: Calcular el valor presente justo antes del primer pago (año 3):

$$VP_3 = \frac{R}{i} = \frac{2{,}000}{0.08} = 25{,}000$$

Paso 2: Traer ese valor a valor presente actual (año 0):

$$VP_0 = VP_3(1+i)^{-3} = 25{,}000(1.08)^{-3} = 25{,}000(0.7938) = 19{,}845$$

El valor presente actual de **la perpetuidad diferida es $19,845.**

Aplicaciones comunes

- **Bonos perpetuos** emitidos por gobiernos o empresas.
- **Fondos de caridad** que financian pagos anuales permanentes.
- **Cálculo del valor de empresas** con flujos de caja perpetuos.

3.8. Ejercicios de aplicación

Ejercicios Anualidades Perpetuas

1. Una fundación desea entregar **$2,500 anuales** de forma perpetua.

Si la tasa de interés es del 5% anual, ¿cuál es el capital necesario para financiarla?

2. Una empresa emite acciones preferentes que pagan un dividendo fijo de **$150 al año**. Si la tasa de rendimiento esperada por los inversionistas es del **6% anual**, ¿cuál es el valor actual de cada acción?

3. Se desea establecer un fondo que proporcione $1,000 mensuales de manera perpetua. Si el banco ofrece una tasa del 12% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es el monto que debe invertirse?

4. Una perpetuidad paga $800 cada trimestre, con una tasa del 8% anual capitalizable trimestralmente. Determine el valor presente de la perpetuidad.

5. Un inversionista desea comprar una acción preferente que paga $50 trimestrales de forma indefinida. Si su tasa mínima deseada de rendimiento es del 10% anual capitalizable trimestralmente, ¿cuánto debería pagar por ella?

6. Un fondo universitario quiere otorgar $6,000 cada año de manera perpetua. Si puede obtener una rentabilidad del 7% anual, ¿cuál será el capital que debe disponer hoy?

7. Una perpetuidad empezará a pagar $5,000 anuales dentro de 3 años, con una tasa del 9% anual. ¿Cuál es el valor presente hoy?

8. Una persona desea recibir $2,400 anuales de por vida, pero los pagos comenzarán dentro de 5 años. Si la tasa de interés es del 10% anual, calcule el valor presente actual.

9. Una empresa desea crear un fondo perpetuo que genere $10,000 cada semestre. Si la tasa de interés es del 8% anual capitalizable semestralmente, determine el capital necesario.

10. Un inversionista quiere comprar una perpetuidad que paga $3,000 anuales, pero desea un rendimiento del 12% anual.

    ¿Cuál es el valor máximo que debería pagar?

Respuestas

1. $50,000
2. $2,500
3. $100,000
4. $40,000
5. $2,000
6. $85,714.29
7. $39,685.00
8. $14,905.00
9. $250,000
10. $25,000

UNIDAD 4: AMORTIZACIONES

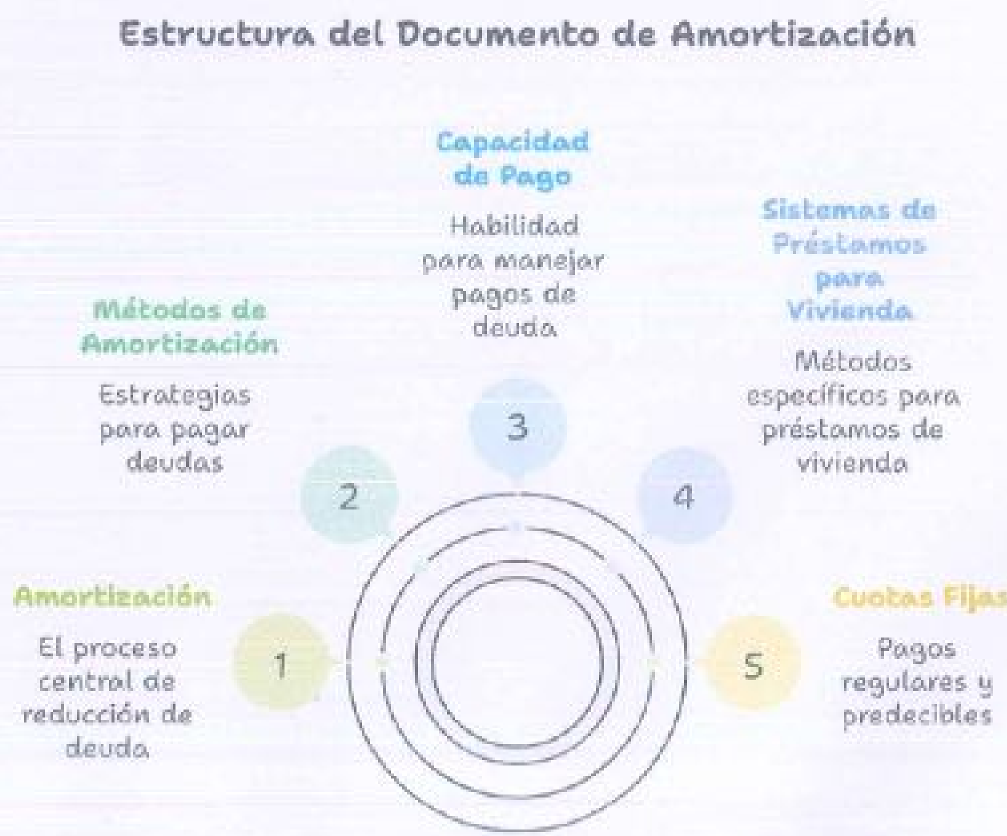
4.1. Sistemas de amortización

4.2. Capacidad de pago
4.3. Sistemas de amortización de créditos para vivienda
4.4. Sistemas de amortización de créditos en UVR
4.5. Ejercicios de aplicación
4.6. Cuota fija
4.7. Amortización constante
4.8. Cuota decreciente
4.9. Amortización de créditos varios sistemas
4.10. Ejercicios de aplicación

Resultado de Aprendizaje

Emplea el manejo de anualidades para la realización de flujos de efectivo en el ámbito financiero.

DIAGRAMA DE APRENDIZAJE



SINTESIS.

La amortización es el proceso mediante el cual se paga una deuda a través de cuotas periódicas que incluyen una parte de capital y otra de intereses, hasta cancelar el préstamo en su totalidad. Existen distintos sistemas de amortización: el francés (cuota fija), el alemán (capital constante) y el americano (intereses periódicos y capital al final).

La capacidad de pago determina cuánto puede comprometer una persona de sus ingresos sin afectar su economía.
En los créditos para vivienda se utiliza comúnmente el sistema francés, mientras que en los créditos en UVR las cuotas se actualizan con la inflación.

El conocimiento de estos métodos permite planificar los pagos, analizar los intereses y manejar de forma responsable las obligaciones financieras.

4.1. Sistemas de amortización.

La amortización de una obligación o deuda se define como el proceso mediante el cual se paga la misma junto con sus intereses, en una serie de pagos y en un tiempo determinado. Para visualizar de manera fácil como se paga una deuda, se realiza una tabla de amortización, la cual, es un cuadro donde se describe el comportamiento del crédito en lo referente a saldo, cuota cancelada, intereses generados por el préstamo, abonos a capital. En ocasiones la cuota pagada en un préstamo se dedica primero a pagar los intereses y lo que sobre se considera abono a capital
Los sistemas de amortización son métodos que permiten el pago de una deuda en cuotas periódicas, combinando el capital y los intereses.

Tipos principales:

1. **Sistema Francés o de Cuota Fija**

   Descripción:

   En este sistema, las cuotas de pago son iguales durante todo el período del préstamo. Sin embargo, la composición de la cuota varía: al principio se paga más interés y menos capital; al final, el interés disminuye y la amortización de capital aumenta.

   Fórmula de la cuota fija:

$$\text{Cuota} = \frac{P \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Donde:

- P= capital prestado
- i= tasa de interés por periodo
- n= número de períodos

Ejemplo:

Préstamo de $10,000 a 2 años (24 meses) al 12% anual (1% mensual). Calcula la cuota.

$$P = 10000, i = 0.01, n = 24$$

$$\text{Cuota} = \frac{10000 \times 0.01}{1-(1+0.01)^{-24}} = 470.73$$

Cuota mensual = $470.73

Mes	Cuota	Interés (1%)	Amortización	Saldo Deuda
1	470.73	100.00	370.73	9,629.27
2	470.73	96.29	374.44	9,254.83
...	...	...	...	...
24	470.73	4.65	466.08	0.00

2. **Sistema Alemán o de Amortización Constante**

Descripción:

En este sistema, el capital amortizado cada período es constante, por lo que los intereses disminuyen con el tiempo (porque se calculan sobre el saldo por pagar). Como resultado, las cuotas son decrecientes.

Ejemplo:

Préstamo de $8,000 a 4 años al 10% anual. Se paga anualmente.

Amortización del capital:

$$\frac{8000}{4} = 2000 \text{ por año}$$

Año	Cuota	Interés (10%)	Amortización	Saldo Deuda
1	2,800	800.00	2,000	6,000
2	2,600	600.00	2,000	4,000
3	2,400	400.00	2,000	2,000
4	2,200	200.00	2,000	0

3. **Sistema Americano o de Pago Único del Capital**

Descripción:

En este sistema, el deudor paga solo los intereses durante el tiempo del préstamo y el capital total al final. Es común en pagarés o financiamientos cortos.

Ejemplo:

Préstamo de $5,000 a 3 años al 8% anual. Pago anual.

Año	Interés (8%)	Capital Pagado	Pago Total	Saldo Deuda
1	400.00	0	400.00	5,000
2	400.00	0	400.00	5,000
3	400.00	5,000	5,400.00	0

El deudor paga: 3 pagos de $400 por intereses y al final $5,000 de capital.

4.2. Capacidad de Pago

La capacidad de pago se refiere al monto máximo que una persona o entidad puede destinar a pagar una deuda sin afectar su estabilidad financiera.

Ejemplo:

Un trabajador gana $800 mensuales y gasta $600 en sus necesidades. Su capacidad de ahorro es $200, lo que también es su capacidad de pago máxima para un crédito

4.3. Sistemas de amortización de créditos para vivienda.

Para la adquisición de vivienda, las instituciones financieras suelen utilizar diferentes sistemas de amortización para calcular las cuotas que el deudor debe pagar periódicamente. Los más utilizados son:

- Sistema Francés o de Cuota Fija
- Sistema Alemán o de Amortización Constante
- Sistema Americano
- Sistema con tasa variable (como UVR en Colombia)
- Sistema con cuota decreciente o creciente (a veces usado en promociones)

Ejemplo 1: Sistema Francés (Cuota Fija)

Datos:

- Crédito: $60,000
- Plazo: 20 años (240 meses)
- Tasa anual: 10% (0.83% mensual)

Cálculo de la cuota:

$$\text{Cuota} = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{60000 \times 0.0083}{1-(1.0083)^{-240}} = 579.99$$

Cuota mensual fija: $579.99

Ejemplo 2: Sistema Alemán (Amortización Constante)

Datos:

- Crédito: $50,000
- Plazo: 10 años (120 meses)
- Tasa anual: 9% (0.75% mensual)

Amortización mensual del capital:

$$\frac{50000}{120} = 416.67$$

Primer mes:

- Interés: 0.75% de 50,000 = $375
- Cuota: $416.67 + $375 = $791.67

Segundo mes:

- Saldo: 50,000 – 416.67 = $49,583.33
- Interés: 0.75% de 49,583.33 = $371.87
- Cuota: 416.67 + 371.87 = $788.54

Cuotas **decrecientes** con el tiempo.

Ejemplo 3: Sistema Americano

Datos:

- Crédito: $30,000
- Plazo: 5 años
- Tasa anual: 8%

Pago anual de intereses:

$$30{,}000 \times 0.08 = 2{,}400$$

Pagos:

- Año 1–4: $2,400 (solo intereses)
- Año 5: $2,400 (intereses) + $30,000 (capital) = $32,400

Total pagado al final: $30,000 en capital + $12,000 en intereses.

Ejemplo 4: Crédito en UVR (Unidad de Valor Real)

Datos:

- Crédito: 100,000 UVR
- Valor inicial de UVR: $300
- Plazo: 15 años
- Suposición: La UVR aumenta 3% anual

Año 1:

- Deuda en pesos: 100,000 × 300 = $30,000,000
- Cuota en UVR = 1,000 UVR = $300,000

Año 2:

- Nueva UVR: 300 × 1.03 = $309
- Cuota: 1,000 UVR × 309 = $309,000

Cuotas aumentan según la inflación.

Ejemplo 5: Sistema de Cuota Creciente (ideal para jóvenes)

Datos:

- Crédito: $80,000
- Plazo: 15 años
- Tasa anual: 10%
- Crecimiento de cuota: 2% anual

Primer año:

- Cuota base: $860 mensual (promedio)
- Año 2: $\$860 \times 1.02 = \$877.20$
- Año 3: $\$877.20 \times 1.02 = \$894.74$
- ...
- Año 15: $\$860 \times (1.02)^{14} = \$1,143.29$

Cuotas aumentan con el tiempo, lo que favorece a quienes esperan mayores ingresos futuros.

Cuadro Comparativo de los Sistemas de Amortización

Sistema	Cuota	Interés	Capital	Plazo	Características
Francés (cuota fija)	Fija durante todo el préstamo	Decreciente con el tiempo	Creciente con el tiempo	Largo plazo (15–30 años)	Estabilidad para el cliente; popular en hipotecas
Alemán (amort. constante)	Decreciente	Decreciente	Constante	Mediano a largo plazo	Cuotas altas al inicio; baja carga final
Americano (pago único capital)	Solo intereses durante el plazo	Constante	Total al final	Corto-mediano plazo	Bajo pago inicial, alto al final; usado en créditos puente
UVR (variable según inflación)	Variable	Variable	Variable	Largo plazo	Protege contra inflación; cuotas ascienden si la UVR sube
Cuota creciente	Creciente (fórmula)	Proporcional a saldo	Variable	Largo plazo	Ideal para jóvenes o ingresos proyectados a aumentar

4.4. Sistemas de amortización de créditos en UVR

La **UVR** —Unidad de Valor Real— es una unidad de cuenta indexada (generalmente a la inflación) que se utiliza en algunos países para denominar créditos y contratos. Cuando un crédito está expresado en UVR:

- El **saldo** y las **cuotas** se calculan en **UVR.**
- El deudor paga en moneda corriente (por ejemplo, pesos), convirtiendo la cuota en UVR a moneda usando el valor vigente de la UVR en la fecha de pago.
- Así, la **cantidad de UVR a pagar** permanece según el sistema de amortización elegido, pero el **valor en moneda** puede variar con la evolución del índice que fija la UVR.

A continuación se desarrollan dos sistemas clásicos (Sistemas francés y alemán) aplicados a créditos en **UVR**, con ejercicios resueltos y cronogramas.

Sistema 1 — Sistema Francés (cuota fija, «anualidad»)

Características: la cuota periódica (en UVR) es constante durante todo el plazo. Cada cuota cubre interés sobre el saldo y la parte restante amortiza capital.

Ejercicio 1 (resuelto)

Préstamo: **10 000 UVR.**
Plazo: **3 años.**
Tasa de interés nominal anual: **10%** (interés anual).
Sistema: **Frances (cuota fija).**

Cálculo de la cuota anual (A):
Fórmula: $A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.
Con $P = 10000$, $i = 0{,}10$, $n = 3$:

$$A = 10000 \cdot \frac{0{,}10}{1-(1+0{,}10)^{-3}} \approx 4021{,}15 \text{ UVR (anual)}$$

Cronograma (redondeado a 2 decimales):

Año	Saldo inicial (UVR)	Interés (i·saldo)	Amortización (A-interés)	Cuota A (UVR)	Saldo final
1	10 000,00	1 000,00	3 021,15	4 021,15	6 978,85
2	6 978,85	697,89	3 323,26	4 021,15	3 655,59
3	3 655,59	365,56	3 655,59	4 021,15	0,00

Interpretación: la cuota anual en UVR es constante (**4 021,15 UVR**). La porción de interés disminuye con el tiempo y la amortización de capital aumenta.

Sistema 2 — Sistema Alemán (amortización constante)

Características: la amortización de capital es constante en cada periodo; los intereses se calculan sobre el saldo decreciente, por tanto **la cuota total va disminuyendo con el tiempo.**

Ejercicio 2 (resuelto)

Préstamo: **10 000 UVR.**
Plazo: **4 años**.
Tasa de interés anual: **8%**.
Sistema: **Alemán (amortización constante).**

Cálculo: amortización anual constante $= \frac{P}{n} = \frac{10000}{4} = 2\,500$ UVRpor año.

Cronograma (redondeado a 2 decimales):

Año	Saldo inicial (UVR)	Interés (8%)	Amortización (const)	Cuota (interés+amort)	Saldo final
1	10 000,00	800,00	2 500,00	3 300,00	7 500,00
2	7 500,00	600,00	2 500,00	3 100,00	5 000,00
3	5 000,00	400,00	2 500,00	2 900,00	2 500,00
4	2 500,00	200,00	2 500,00	2 700,00	0,00

Interpretación: la amortización anual es fija (2 500 UVR). Las cuotas van disminuyendo conforme baja el saldo (y por eso disminuye el interés)

Observaciones prácticas sobre créditos en UVR

1. **Protección ante inflación:** para el prestamista, la UVR preserva el poder adquisitivo del capital; para el deudor, los pagos en moneda pueden subir si la UVR sube.

2. **Elección del sistema:**

    - Si quieres cuotas constantes en UVR y más previsibilidad en la carga de UVR → **Sistema francés.**

    - Si quieres reducir la deuda más rápido y pagar menos interés total en casos de tasas moderadas → **Sistema alemán** (cuotas decrecientes en UVR).

3. **Conversión a moneda local:** para conocer cuánto se paga en efectivo cada periodo necesitas el **valor de la UVR** (diario o mensual según calendario de pagos).

4. **Comparación entre ofertas:** al comparar préstamos en UVR con préstamos en moneda fija, ten en cuenta la expectativa de inflación y cómo varía el valor de la UVR.

4.5. Ejercicios de aplicación.

1. **Sistema Francés (cuota fija)**
Un crédito hipotecario de $80.000 a 25 años (300 meses) con una tasa del 9% anual (0,75% mensual). Calcula la cuota mensual.

2. **Sistema Alemán (amortización constante)**
Crédito de $120.000 a 20 años, tasa 10% anual, pagos anuales. Calcula:
a) Valor anual de amortización del capital.
b) Cuota del primer año.
c) Cuota del cuarto año.

3. **Sistema Americano (pago único del capital)**
Crédito de $30.000 a 5 años, tasa 8% anual. Calcula el pago anual de intereses y el pago final (último año) que incluye capital más intereses.

4. **Crédito en UVR (ajustado por inflación)**
Crédito por 100.000 UVR, valor inicial de la UVR = $300, plazo 15 años. Supón que la UVR aumenta 3% en el primer año. Calcula:
a) Deuda inicial en pesos.
b) Deuda en pesos después de 1 año (con UVR aumentada).
c) Si la cuota es 1.000 UVR, calcula su valor en pesos al inicio y después de 1 año.

5. **Ejercicio práctico corto (Francés mensual)**
Crédito de $5.000 a 1 año (12 meses), tasa 12% anual. Calcula la cuota mensual (sistema francés).

6. **Capacidad de pago y comparación**

   Una persona gana $1.200 mensuales y tiene gastos fijos por $850.

   a) Calcula su capacidad de pago mensual.

   b) Si pide un préstamo de $10.000 a 2 años (24 meses) con tasa 12% anual, ¿la cuota mensual calculada por el sistema francés es asequible según su capacidad de pago?

7. **Cuota decreciente (año a año — Alemán)**

   Crédito de $8.000 a 4 años, tasa 10% anual, pagos anuales, sistema alemán. Elabora las cuotas anuales (interés, cuota total) para cada año.

8. **Comparación total pagado: Francés vs Alemán**

   Crédito de $10.000 por 5 años, tasa 8% anual, pagos anuales.

   a) Calcula la cuota anual si se usa el sistema francés.

   b) Calcula el total pagado durante la vida del crédito con sistema francés y con sistema alemán (amortización constante). ¿Cuál total es menor?

9. **Período de gracia (intereses solo) → luego sistema francés**

   Hipoteca de $200.000 con tasa 6% anual. Durante 1 año paga solo intereses (mensualmente). Luego, a partir del mes 13, amortiza el capital restante con sistema francés en 29 años ($n = 29 \cdot 12$) a la misma tasa anual.

   a) ¿Cuánto paga mensualmente durante el primer año?

   b) ¿Cuál será la cuota mensual a partir del mes 13 (aprox.)?

10. **Pago mensual de interés y globo final (versión mensual del americano)**

    Crédito de $15.000, plazo 3 años, tasa 9% anual, pagos mensuales de intereses y principal al final (pago globo).

    a) ¿Cuánto paga cada mes en concepto de intereses?

    b) ¿Cuánto paga en el último mes (intereses + capital)?

Respuestas.

1. Cuota mensual (Francés) = $671.36

2. a) Amortización anual del capital = $6.000.00

   b) Cuota año 1 = amortización + interés = $18.000.00 (interés $12.000)

   c) Cuota año 4 = $16.200.00

3. Pago anual de intereses = $2.400.00

   Pago en el año final (intereses + capital) = $32.400.00

4. a) Deuda inicial = 100.000 × \$300 = \$30.000.000
   b) Con UVR +3% → UVR = \$309 → deuda = 100.000 × \$309 = \$30.900.000
   c) Cuota 1.000 UVR → inicio = \$300.000; después 1 año = \$309.000
5. Cuota mensual (Francés, 12 meses, 12% a.a.) = \$444.24
6. a) Capacidad de pago mensual = \$350 (1.200 − 850)
   b) Cuota del préstamo \$10.000, 2 años, 12% a.a. (mensual, francés) = \$470.73 → No es asequible (470.73 > 350)
7. Cuotas anuales (P=\$8.000, 4 años, 10% a.a., amortización constante):
   - Año 1: interés \$800.00 → cuota = \$2.800.00 (amortización \$2.000)
   - Año 2: interés \$600.00 → cuota = \$2.600.00
   - Año 3: interés \$400.00 → cuota = \$2.400.00
   - Año 4: interés \$200.00 → cuota = \$2.200.00
8. (P=\$10.000, 5 años, 8% anual, pagos anuales)
   a) Cuota anual (Francés) ≈ \$2.504.56
   b) Total pagado (Francés) = \$12.522.82
   Total pagado (Alemán) = \$12.400.00
   → El sistema alemán resulta en menor total pagado en este caso.
9. a) Primer año — pagos mensuales de intereses = \$1.000.00 (200.000 × 6% / 12)
   b) Cuota mensual después (amortizando 200.000 en 29 años al 6% a.a.) ≈ \$1.214.01
10. a) Pago mensual de intereses = \$112.50 (15.000 × 9% / 12)
    b) Pago último mes = intereses + capital = \$15.112.50

4.6. Cuota fija.

¿Qué es la cuota fija?

En el sistema de amortización francés o de cuota fija, el pago periódico (mensual, anual, etc.) es constante durante toda la vida del crédito.

Esta cuota incluye:

- Una parte de interés (sobre el saldo pendiente).
- Una parte de amortización del capital (que va variando: al principio se amortiza poco, luego más).

Este sistema es el más utilizado para créditos hipotecarios, de vehículos y personales.

Fórmula para calcular la cuota fija:

$$\text{Cuota} = \frac{P \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Donde:

- P= capital del préstamo
- i= tasa de interés por período
- n= número total de períodos

Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1: Préstamo personal

- Capital: $10,000
- Plazo: 3 años (36 meses)
- Tasa: 12% anual (= 1% mensual)

$$\text{Cuota} = \frac{10000 \times 0.01}{1 - (1 + 0.01)^{-36}} \approx \$332.14$$

Cuota mensual fija: $332.14

Ejemplo 2: Crédito hipotecario

- Capital: $80,000
- Plazo: 25 años (300 meses)
- Tasa: 9% anual (= 0.75% mensual)

$$\text{Cuota} = \frac{80000 \times 0.0075}{1 - (1.0075)^{-300}} \approx \$671.36$$

Cuota mensual fija: $671.36

Ejemplo 3: Préstamo de auto

- Capital: $18,000
- Plazo: 5 años (60 meses)

- Tasa: 10% anual (≈ 0.83% mensual)

$$\text{Cuota} = \frac{18000 \times 0.0083}{1 - (1 + 0.0083)^{-60}} \approx \$382.45$$

Cuota mensual fija: $382.45

Ejemplo 4: Crédito educativo

- Capital: $5,000
- Plazo: 2 años (24 meses)
- Tasa: 8% anual (≈ 0.67% mensual)

$$\text{Cuota} = \frac{5000 \times 0.0067}{1 - (1.0067)^{-24}} \approx \$226.07$$

Cuota mensual fija: $226.07

Ejemplo 5: Préstamo institucional

- Capital: $50,000
- Plazo: 10 años (120 meses)
- Tasa: 7% anual (≈ 0.583% mensual)

$$\text{Cuota} = \frac{50000 \times 0.00583}{1 - (1 + 0.00583)^{-120}} = \$580.54$$

Cuota mensual fija: $580.54

4.7. Amortización constante.

¿Qué es la amortización constante?

En el sistema de amortización constante (también llamado sistema alemán) la porción de capital amortizado en cada periodo es siempre la misma.

Eso implica que:

- Amortización por periodo = $\frac{P}{n}$(constante).
- Interés del periodo = $r \times$ saldo pendiente al inicio del periodo.
- Cuota del periodo = amortización constante + interés del periodo.
- Como los intereses van disminuyendo (porque el saldo pendiente baja), las cuotas totales van decreciendo con el tiempo.

A continuación tienes 3 ejemplos claros (con cálculos paso a paso).

Ejemplo 1 — Pagos anuales (caso simple)

Datos: $P = \$8{,}000$, plazo $n = 4$años, tasa anual $r = 10\%$.

1. Amortización anual (constante):

$$\text{Amortización} = \frac{P}{n} = \frac{8{,}000}{4} = 2{,}000\ \$ \text{ por año}$$

2. Año 1:

- Saldo inicial = \$8.000
- Interés año 1 = $8{,}000 \times 0.10 = 800$
- Cuota año 1 = amortización + interés = $2{,}000 + 800 = 2{,}800$
- Saldo al terminar año 1 = $8{,}000 - 2{,}000 = 6{,}000$

3. Año 2:

- Interés = $6{,}000 \times 0.10 = 600$
- Cuota = $2{,}000 + 600 = 2{,}600$
- Saldo final = $6{,}000 - 2{,}000 = 4{,}000$

4. Año 3:

- Interés = $4{,}000 \times 0.10 = 400$
- Cuota = $2{,}000 + 400 = 2{,}400$
- Saldo final = $4{,}000 - 2{,}000 = 2{,}000$

5. Año 4:

- Interés = $2{,}000 \times 0.10 = 200$
- Cuota = $2{,}000 + 200 = 2{,}200$
- Saldo final = $2{,}000 - 2{,}000 = 0$

Resumen (Año: interés — amortización — cuota — saldo final):

1: 800 — 2.000 — 2.800 — 6.000

2: 600 — 2.000 — 2.600 — 4.000

3: 400 — 2.000 — 2.400 — 2.000

4: 200 — 2.000 — 2.200 — 0

Total pagado = $2{,}800 + 2{,}600 + 2{,}400 + 2{,}200 = \$10{,}000$.

(De los cuales \$2.000 son intereses totales.)

Ejemplo 2 — Pagos mensuales (caso con decimales)

Datos: $P = \$20{,}000$, plazo $= 5$años $\Rightarrow n = 60$meses, tasa anual $= 12\% \Rightarrow$tasa mensual $i = 0.12/12 = 0.01$(1% mensual).

1. Amortización mensual (constante):

$$\text{Amortización} = \frac{20{,}000}{60} = 333.333\ldots\ \$\text{ por mes}$$

(Usamos 333.333333...; en la práctica se redondea por pago.)

2. Cálculo de algunos meses (mostramos primeros 5 y últimos 5 para ver la evolución):

- Mes 1
  - Saldo inicial = 20,000.00
  - Interés $= 20{,}000 \times 0.01 = 200.00$
  - Amortización = 333.3333... (se puede usar 333.33 o 333.333 según convención)
  - Cuota ≈ $200.00 + 333.3333 = 533.33$(si se redondea a centavos)
  - Saldo final ≈ $20{,}000 - 333.3333 = 19{,}666.6667$
- Mes 2
  - Interés $= 19{,}666.6667 \times 0.01 = 196.6667$
  - Cuota ≈ $196.6667 + 333.3333 = 530.00$
  - Saldo final ≈ 19,333.3334
- Mes 3
  - Interés ≈ 193.3333
  - Cuota ≈ 526.67
  - Saldo final ≈ 19,000.0001
- Mes 4
  - Interés ≈ 190.00
  - Cuota ≈ 523.33
- Mes 5
  - Interés ≈ 186.6667
  - Cuota ≈ 520.00

(...)

- Mes 56
  - Interés ≈ 16.6667
  - Cuota ≈ 350.00
  - Saldo final ≈ 1,333.3352
- Mes 57

- Interés ≈ 13.3334
- Cuota ≈ 346.67

- Mes 58
  - Interés ≈ 10.00
  - Cuota ≈ 343.33
- Mes 59
  - Interés ≈ 6.6667
  - Cuota ≈ 340.00
- Mes 60 (último)
  - Interés ≈ 3.3334
  - Cuota ≈ 336.67
  - Saldo final ≈ 0.00 (ajustando redondeos)

Observaciones:

- La amortización mensual es fija en la teoría (20.000 / 60 = 333.3333...), pero por cuestiones prácticas se redondea a centavos en cada pago; el banco puede ajustar la última cuota para corregir redondeos.
- Las cuotas van decreciendo desde ≈$533.33 el primer mes hasta ≈$336.67 el último mes.

Ejemplo 3 — Pagos anuales, plazo más largo

Datos: $P = \$50{,}000$, plazo = 10años, tasa anual $r = 7\%$.

1. Amortización anual (constante):

$$\text{Amortización} = \frac{50{,}000}{10} = 5{,}000 \text{ \$ por año}$$

2. Años con cálculos:

- Año 1
  - Saldo inicial = 50.000
  - Interés $= 50{,}000 \times 0.07 = 3{,}500$
  - Cuota $= 5{,}000 + 3{,}500 = 8{,}500$
  - Saldo final = 45.000
- Año 2
  - Interés $= 45{,}000 \times 0.07 = 3{,}150$
  - Cuota $= 5{,}000 + 3{,}150 = 8{,}150$
  - Saldo final = 40.000

- Año 3
  - Interés = 2.800 → cuota = 7.800 → saldo final 35.000
- Año 4
  - Interés = 2.450 → cuota = 7.450 → saldo final 30.000
- Año 5
  - Interés = 2.100 → cuota = 7.100 → saldo final 25.000
- Año 6
  - Interés = 1.750 → cuota = 6.750 → saldo final 20.000
- Año 7
  - Interés = 1.400 → cuota = 6.400 → saldo final 15.000
- Año 8
  - Interés = 1.050 → cuota = 6.050 → saldo final 10.000
- Año 9
  - Interés = 700 → cuota = 5.700 → saldo final 5.000
- Año 10
  - Interés = 350 → cuota = 5.350 → saldo final 0

Total pagado = suma de todas las cuotas =

$8{,}500 + 8{,}150 + 7{,}800 + 7{,}450 + 7{,}100 + 6{,}750 + 6{,}400 + 6{,}050 + 5{,}700 + 5{,}350 = \$73{,}250.$

Intereses totales = $73{,}250 - 50{,}000 = \$23{,}250.$

4.8. Cuota decreciente

¿Qué es la cuota decreciente?

El sistema de cuota decreciente es un tipo de amortización en el cual las cuotas de pago van disminuyendo a lo largo del tiempo.

Esto se debe a que:

- La amortización del capital es constante en cada periodo (como en el sistema alemán).
- Los intereses se calculan sobre el saldo pendiente al inicio de cada periodo, por lo que van disminuyendo.
- Por tanto, la cuota total (amortización + interés) va decreciendo con el tiempo.

Este tipo de sistema es utilizado a veces en préstamos relacionados con vivienda, especialmente cuando se busca que el deudor pague más en los primeros años y menos en los últimos.

Ejemplo 1 — Préstamo de vivienda a 5 años

Datos:

- Monto del préstamo: $30,000
- Plazo: **5 años** (pagos anuales)
- Tasa de interés: 10% **anual**

Amortización anual (constante):

$$\frac{30,000}{5} = 6,000 \text{ (capital por año)}$$

Cálculos:

Año	Saldo inicial	Interés (10%)	Amortización	Cuota total	Saldo final
1	30,000	3,000	6,000	9,000	24,000
2	24,000	2,400	6,000	8,400	18,000
3	18,000	1,800	6,000	7,800	12,000
4	12,000	1,200	6,000	7,200	6,000
5	6,000	600	6,000	6,600	0

La cuota total va de 9,000el primer año a 6,600el último año.

Ejemplo 2 — Préstamo a 6 años con pagos semestrales

Datos:

- Préstamo: $24,000
- Plazo: 6 años (12 semestres)
- Tasa nominal anual: 12% (6% por semestre)

Amortización semestral (constante):

$$\frac{24,000}{12} = 2,000 \text{(capital por semestre)}$$

Primeros 3 períodos:

Semestre	Saldo inicial	Interés (6%)	Amortización	Cuota	Saldo final
1	24,000	1,440	2,000	3,440	22,000
2	22,000	1,320	2,000	3,320	20,000
3	20,000	1,200	2,000	3,200	18,000
...	...	...	...	...	...
12	2,000	120	2,000	2,120	0

Las cuotas van disminuyendo de 3,440 hasta 2,120 al final.

Ejemplo 3 — Préstamo de consumo a 3 años (pagos trimestrales)

Datos:

- Préstamo: $10,000
- Plazo: 3 años (12 trimestres)
- Tasa anual: 8% (2% trimestral)

Amortización trimestral (constante):

$$\frac{10,000}{12} \approx 833.33$$

Trimestre	Saldo inicial	Interés (2%)	Amortización	Cuota	Saldo final
1	10,000	200.00	833.33	1,033.33	9,166.67
2	9,166.67	183.33	833.33	1,016.66	8,333.34
3	8,333.34	166.67	833.33	1,000.00	7,500.01
…	…	…	…	…	…
12	833.33	16.67	833.33	850.00	0

La primera cuota es 1,033.33 y la última es 850.00

4.9. Amortización de créditos varios sistemas

En el mundo financiero, la amortización de créditos se puede realizar mediante distintos sistemas, dependiendo de las necesidades del cliente o la política de la entidad financiera.

Los sistemas de amortización más comunes son:

1. Sistema Francés o de Cuota Fija
2. Sistema Alemán o de Amortización Constante
3. Sistema Americano o de Pago Único del Capital

Cada sistema define cómo se distribuye el pago entre intereses y amortización del capital.

Ejemplo 1: Compara los 3 sistemas de amortización

Datos del crédito:

- Monto: $20,000
- Plazo: 4 años
- Tasa de interés: 10% anual

- Pago anual

Sistema Francés (cuota fija)

La cuota anual es constante:

$$\text{Cuota} = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{20000 \cdot 0.10}{1-(1.10)^{-4}} = \$6,331.19$$

Año	Saldo inicial	Interés (10%)	Amortización	Cuota	Saldo final
1	20,000	2,000	4,331.19	6,331.19	15,668.81
2	15,668.81	1,566.88	4,764.31	6,331.19	10,904.50
3	10,904.50	1,090.45	5,240.74	6,331.19	5,663.76
4	5,663.76	566.38	5,764.81	6,331.19	0

Sistema Alemán (amortización constante)

Amortización constante:

$$\text{Amortización} = \frac{20000}{4} = \$5,000$$

Año	Saldo inicial	Interés (10%)	Amortización	Cuota	Saldo final
1	20,000	2,000	5,000	7,000	15,000
2	15,000	1,500	5,000	6,500	10,000
3	10,000	1,000	5,000	6,000	5,000
4	5,000	500	5,000	5,500	0

Sistema Americano (pago único del capital)

Solo paga los intereses durante los 4 años y el capital al final:

Año	Saldo inicial	Interés (10%)	Amortización	Cuota	Saldo final
1	20,000	2,000	0	2,000	20,000
2	20,000	2,000	0	2,000	20,000
3	20,000	2,000	0	2,000	20,000
4	20,000	2,000	20,000	22,000	0

Sistema	Total pagado	Observación
Francés	$25,324.76	Cuota constante, intereses decrecientes
Alemán	$25,000	Se paga más al inicio, menos al final
Americano	$30,000	Más costoso; capital al final

Ejemplo 2: Préstamo de consumo — Sistema Alemán vs Francés

Datos:

- Monto: $12,000
- Plazo: 3 años
- Tasa: 12% anual
- Pago anual

Sistema Francés (cuota fija):

Cuota:

$$\text{Cuota} = \$4{,}986.73$$

Sistema Alemán:

Amortización constante:

$$\text{Amortización} = \frac{12000}{3} = 4000$$

Año	Sistema Francés	Sistema Alemán
1	$4,986.73	$5,440
2	$4,986.73	$4,960
3	$4,986.73	$4,480

El sistema alemán empieza con una cuota más alta, pero paga menos intereses en total.

4.10. Ejercicios de aplicación

Ejercicio 1 — Sistema Francés (Cuota Fija)

Un préstamo de $8,000 a 3 años con una tasa de 12% anual y pagos anuales.

a) Calcula la cuota fija anual.

b) Determina el total pagado al final del préstamo.

Ejercicio 2 — Sistema Alemán (Amortización Constante)

Un préstamo de $15,000 a 5 años con tasa de 10% anual (pagos anuales).

a) Calcula la amortización anual.

b) ¿Cuál será el valor de la primera cuota?

c) ¿Y la tercera cuota?

Ejercicio 3 — Sistema Americano (Pago Único del Capital)

Un crédito de $25,000 con plazo de 4 años y tasa de 8% anual, bajo sistema americano.

a) ¿Cuánto paga el deudor cada año?

b) ¿Cuánto paga al final del préstamo?

Ejercicio 4 — Sistema Francés (Cuota mensual)

Un préstamo de $20,000 a 5 años (60 meses) con una tasa del 0.9% mensual.

a) Calcula la cuota mensual fija.

b) ¿Cuánto es el total pagado al final?

Ejercicio 5 — Sistema Alemán (Con cuota decreciente)

Un préstamo de $10,000 a 4 años, tasa de 9% anual.

a) Calcula la amortización anual.

b) Determina las cuotas de los años 1, 2, y 4.

Ejercicio 6 — Sistema Americano (Pago semestral)

Un crédito de $12,000 a 3 años (6 semestres) con una tasa de 6% semestral.

a) ¿Cuánto se paga cada semestre en intereses?

b) ¿Cuál es el monto del último pago?

Ejercicio 7 — Comparación entre sistemas

Un préstamo de $30,000 a 6 años con 12% anual.

Calcula el total pagado si se utiliza:

a) Sistema Francés

b) Sistema Alemán

c) Sistema Americano

Ejercicio 8 — Sistema Francés con interés variable

Un préstamo de $50,000 a 10 años, con cuota fija anual, pero la tasa cambia cada año (del 8% al 10%).

a) ¿Cómo se ve afectada la cuota fija si la tasa sube?

b) ¿Qué sucede con los intereses totales pagados?

Ejercicio 9 — Sistema Alemán con pagos trimestrales

Un crédito de $8,000 a 2 años (8 trimestres), tasa de 3% trimestral.

a) Calcula la amortización trimestral.

b) Determina la primera y última cuota.

Ejercicio 10 — Elección de sistema

Un cliente necesita $40,000, y le ofrecen 3 opciones:

- Sistema Francés con 9% anual
- Sistema Alemán con 10% anual
- Sistema Americano con 7% anual

  Plazo: 6 años

  a) ¿Qué sistema le recomendarías si quiere pagar menos intereses?

  b) ¿Y si prefiere cuotas bajando con el tiempo?

Respuestas

Ejercicio 1

a) Cuota anual ≈ $3,350.54

b) Total pagado ≈ $10,051.62

Ejercicio 2

a) Amortización anual = $3,000

b) Primera cuota = $4,500

c) Tercera cuota = $3,600

Ejercicio 3

a) Interés anual = $2,000

b) Último pago = $27,000

Ejercicio 4

a) Cuota mensual ≈ $418.09

b) Total pagado ≈ $25,084.96

Ejercicio 5

a) Amortización anual = $2,500

b) Cuota año 1 = $3,400

Cuota año 2 = $3,175

Cuota año 4 = $2,725

Ejercicio 6

a) Interés semestral = $720

b) Último pago = $12,720

Ejercicio 7

a) Francés: Total ≈ $43,049

b) Alemán: Total = $42,000

c) Americano: Total = $51,600

Ejercicio 8

a) La cuota fija sube si aumenta la tasa

b) Los intereses totales también aumentan

Ejercicio 9

a) Amortización = $1,000

b) Primera cuota = $1,240

Última cuota = $1,030

Ejercicio 10

a) Menos intereses = Sistema Alemán

b) Cuotas decrecientes = Sistema Alemán

ELABORACIÓN, REVISIÓN Y APROBACIÓN DE PARES	
Profesor(a)	
Lcdo. Héctor Anibal Lozada Grefa.	
Fecha de elaboración: 31/10/2025	
Comisión de revisión de pares de guías de estudio del Instituto Superior Tecnológico Tena	
Lcda. María Angélica Campoverde Encalada	Mg. Alvaro Santiago Toalombo Díaz
Mg. Henry Fabian Chango Chango	2025. Mg. Duarte Mora Martha Janina
Abg. Danilo Alexander Zamora Núñez., Mg.	
Fecha de revisión: 28/11/2025	
Coordinador de Investigación, Desarrollo Tecnológico e Innovación	
Abg. Danilo Alexander Zamora Núñez., Mg. INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO TENA COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN	
Fecha de aprobación: 09/12/2025	

GLOSARIO

1. Agentes Económicos:
Son los actores que participan en la economía: las familias, que consumen; las empresas, que producen; y el Estado, que regula y redistribuye los recursos.

2. Sistema Económico:
Es el conjunto de instituciones, normas y métodos que una sociedad utiliza para organizar la producción, distribución y consumo de bienes y servicios.

3. Economía de Mercado:
Sistema económico donde las decisiones se basan en la oferta y la demanda, y los precios los determina el mercado.

4. Economía Planificada:
Sistema donde el Estado controla los recursos y decisiones económicas, estableciendo qué, cómo y para quién producir.

5. Empresa:
Entidad que combina recursos humanos, materiales, tecnológicos y financieros para producir bienes o servicios con fines de lucro o beneficio social.

6. Producción:
Proceso mediante el cual se transforman materias primas en productos finales o se ofrecen servicios útiles para satisfacer necesidades humanas.

7. Factores de Producción:
Recursos necesarios para producir: tierra, trabajo, capital y organización, que al combinarse generan bienes y servicios.

8. Redistribución de Factores:
Proceso que busca repartir los recursos y beneficios económicos de manera más justa, promoviendo igualdad y desarrollo social.

9. Costo de Producción:
Total de gastos en los que incurre una empresa para fabricar un producto o brindar un servicio, incluyendo mano de obra, materiales y energía.

10. Costos Fijos:
Gastos que no cambian con el nivel de producción, como alquileres, seguros o sueldos administrativos.

11. Costos Variables:
Gastos que aumentan o disminuyen según la producción, como materias primas, combustible o energía eléctrica.

12. Costo Total:
Suma de los costos fijos y variables, que representa el gasto total necesario para producir una cantidad determinada de bienes.